

Appendix A

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

of $U(n)$ is not trivial, and $U(n)$ is not solvable. The group Γ is dense in $U(n)$: skew adjoints elements of D are dense in the skew adjoint matrices in $M(n, \mathbf{C})$, and the Cayley transform $t \mapsto \frac{t - 1}{t + 1}$ is an homeomorphism from the space of skew-adjoint matrices in $M(n, \mathbf{C})$ to an open dense subset of $U(n)$, carrying skew adjoint elements of D into Γ . From this density, it results that, if $n > 1$, the linear group Γ is not solvable. By [Tits], it contains a non abelian free subgroup.

It remains to construct pairs $(D, *)$. A division algebra D with center k' admits an anti-involution $*$ inducing on k' the non trivial element $\text{Gal}(k'/k)$, if and only if its class $\text{cl}(D)$ in the Brauer group $\text{Br}(k')$ of k' has a trivial image by the norm map $N_{k'/k} : \text{Br}(k') \rightarrow \text{Br}(k)$ —see Appendix B. Class field theory provides an explicit computation of $\text{Br}(k)$, and of $N_{k'/k}$, and tells which elements of $\text{Br}(k')$ come from division algebras. From the explicit description it provides, existence of such D follows. A direct construction is given in Appendix C. When we choose an isomorphism of $D \otimes_k \mathbf{R}$ with $M(n, \mathbf{C})$, the involution $*$ becomes adjunction with respect to some hermitian form ϕ on \mathbf{C}^n , not necessarily positive definite: $\phi(ax, y) = \phi(x, a^*y)$. If h is self adjoint in D , $\text{int}(h^{-1}) \circ *$ is adjunction, with respect to the form $\phi_h(x, y) = \phi(hx, y)$. For suitable h , ϕ_h is positive definite and $(D, \text{int}(h^{-1}) \circ *)$ is of the type sought.

APPENDIX A

Consider $\phi : S' \cup S'' \rightarrow S - E$ as in the introduction, with S' and S'' two copies of the sphere S , and $\psi : S \rightarrow S'$ the obvious bijection. Consider as in the Schröder-Bernstein theorem the set S_e of points p in S with an even number of ancestors, namely for which there exists an integer $n \geq 0$ with $p \in \text{Im}(\phi \circ \psi)^n$ and $p \notin \text{Im}(\psi \circ (\phi \circ \psi)^n)$. Consider also the set S_0 of those p in S for which there exists $n \geq 0$ with $p \in \text{Im}(\psi \circ (\phi \circ \psi)^n)$ and $p \notin \text{Im}(\phi \circ \psi)^{n+1}$, and finally the set S_∞ of those p such that $p \in \text{Im}(\phi \circ \psi)^n$ for any $n \geq 0$. Consider similarly

$$S' \cup S'' = (S' \cup S'')_e \cup (S' \cup S'')_0 \cup (S' \cup S'')_\infty .$$

Then ψ induces a bijection from $S_e \cup S_\infty$ onto $(S' \cup S'')_0 \cup (S' \cup S'')_\infty$ and ϕ^{-1} from S_0 onto $(S' \cup S'')_e$. Combining these two we have a bijection $\chi : S \rightarrow S' \cup S''$ and a partition of S into finitely many pieces, the restriction of χ to each of these being a rotation.