

# IDÉAUX DE GERMES D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À UNE VARIABLE

Autor(en): **Briançon, J. / Maisonobe, Ph.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-53819>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## IDÉAUX DE GERMES D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS À UNE VARIABLE

par J. BRIANÇON et Ph. MAISONOBE

### INTRODUCTION

Notre but dans ce travail est de décrire de la manière la plus explicite possible les idéaux (à gauche) de l'anneau  $\mathcal{D}$  des germes d'opérateurs différentiels analytiques d'une variable complexe. Notre apport repose pour l'essentiel sur le procédé, élémentaire s'il en est, de la division. La plupart des résultats présentés ici étaient déjà connus; nous les démontrons de façon simple en y apportant parfois quelques précisions.

En I.A, nous montrons comment recopier [Br] pour faire des divisions dans  $\mathcal{D}$  et introduisons un système particulier  $(F_p, \dots, F_q)$  de générateurs d'un idéal  $I$  de  $\mathcal{D}$ , appelé base standard de  $I$ . Soit  $P = a_d(x)D^d + \dots + a_0(x)$  un élément de  $\mathcal{D}$  de degré  $d$ ; appelons valuation de  $P$ , la valuation naturelle de  $a_d(x)$  dans  $\mathbf{C}\{x\}$ ; disons seulement que  $F_p$  (resp.  $F_q$ ) est un élément de  $I$  de degré (resp. valuation) minimal quelconque parmi ceux de valuation (resp. degré) minimale.

En I.B, nous explicitons les relations entre les éléments d'une base standard, ce qui nous permet de donner une présentation de  $I$  sous la forme

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{q-p} \rightarrow \mathcal{D}^{q-p+1} \rightarrow I \rightarrow 0.$$

En « divisant », on montre  $I = \mathcal{D}F_p + \mathcal{D}F_q$ . Nous trouvons donc deux générateurs promis par l'utilisation du théorème de J.T. Stafford ([Bj]; chap. I, th. 8.18).

En I.C, nous examinons les questions sous l'angle des systèmes d'équations différentielles. On y établit que les solutions analytiques de  $I$ ,  $E(I)$ , (resp. microfonctions,  $F(I)$ ) dans un disque coupé sont données par les solutions de l'opérateur  $F_p$  (resp.  $F_q$ ). Les théorèmes de Cauchy et de l'indice de Malgrange ([M<sub>1</sub>] et [M<sub>3</sub>]) nous permettent d'en déterminer le nombre. Toujours en « divisant », on montre alors que ces deux types de solutions déterminent l'idéal: si un opérateur  $P$  s'annule sur  $E(I)$  et  $F(I)$ , il appartient à l'idéal  $I$ .

En II.A, nous explicitons complètement les idéaux de  $\mathcal{D}$  à singularité régulière homogène. Cela nous permet de donner « les escaliers possibles » ou, ce qui revient au même, de retrouver dans le cas local une inégalité de P. Strömbeck ([S]).

En II.B, nous donnons une démonstration du théorème de structure des  $\mathcal{D}$ -modules holonomes à singularité régulière (ou des quotients  $\mathcal{D}/I$ , où  $I$  est à singularité régulière) dû à L. Boutet de Monvel ([B.M.]). Nous utilisons pour cela l'idée essentielle qui nous a été apportée par B. Malgrange, d'étudier les classes d'isomorphismes  $E(I) \xrightarrow[u]{v} F(I)$  ( $u$  morphisme canonique et  $v$  morphisme de variation).  $E(I)$  et  $F(I)$  sont formés de fonctions de classe de Nilsson et une fois décomposé le couple  $(E(I), F(I))$ , il suffit d'appliquer les résultats de I.C.

En II.C, nous donnons la structure possible des solutions d'un seul opérateur différentiel à singularité régulière; plus précisément nous déterminons les classes d'isomorphismes  $E(\mathcal{D}P) \xrightarrow[u]{v} F(\mathcal{D}P)$  pour un tel opérateur  $P$  (ou encore des classes d'isomorphismes des quotients  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ ).

Nous sommes heureux de remercier F. Pham et J.E. Björk de l'aide et des encouragements qu'ils nous ont prodigués.

## I. BASE STANDARD D'UN IDÉAL DE $\mathcal{D}$

$\mathbf{C}\{x\}$  désigne l'anneau local des séries convergentes d'une variable et  $v$  la valuation naturelle sur  $\mathbf{C}\{x\}$ : pour  $a$  élément non nul de  $\mathbf{C}\{x\}$ ,

$$v(a) = \sup\{n \in \mathbf{N} \mid a \in \mathbf{C}\{x\}x^n\}.$$

$D$  désigne l'opérateur différentiel  $\frac{d}{dx}$ . Dans tout l'article, idéal de  $\mathcal{D}$  signifie idéal à gauche.

### I.A. DIVISIONS DANS $\mathcal{D}$

Un élément non nul  $P$  de  $\mathcal{D}$  s'écrit de manière unique

$$P = a_d D^d + a_{d-1} D^{d-1} + \dots + a_0$$

avec  $d \in \mathbf{N}$ ;  $(a_d, a_{d-1}, \dots, a_0) \in \mathbf{C}\{x\}^{d+1}$ ;  $a_d \neq 0$ .

Nous définissons l'exposant privilégié de  $P$ :

$$\exp(P) = (v(P), d(P)) \in \mathbf{N}^2$$

$$\begin{cases} v(P) = \text{la valuation naturelle de } a_d \text{ dans } \mathbf{C}\{x\}, \\ d(P) = d \text{ le degré de } P. \end{cases}$$

Pour  $P = a_d D^d + a_{d-1} D^{d-1} + \dots + a_0$  et  $Q = b_e D^e + b_{e-1} D^{e-1} + \dots + b_0$ , la règle de multiplication dans  $\mathcal{D}$  donne (en prenant  $d(0) = -\infty$ ):

$$QP = b_e a_d D^{d+e} + S, \quad d(S) < d + e.$$

On en déduit facilement que pour deux éléments  $P$  et  $Q$  non nuls de  $\mathcal{D}$ :  $\exp(QP) = \exp(Q) + \exp(P)$ , et qu'on a l'algorithme de division:

LEMME 1. *Etant donné  $A \in \mathcal{D}$ ,  $P \in \mathcal{D}$  non nul d'exposant privilégié  $(v, d)$ , il existe un couple unique  $(Q, R)$  d'éléments de  $\mathcal{D}$  tel que:*

$$\begin{cases} A = QP + R, \\ R = \sum_{\substack{0 \leq k < v \\ d(A) \geq l \geq d}} r_{k,l} x^k D^l + S, \quad d(S) < d, \quad r_{k,l} \in \mathbf{C}. \end{cases}$$

Introduisons maintenant, pour un idéal à gauche non nul  $I$  de  $\mathcal{D}$ , l'ensemble  $\text{Exp}(I)$  des exposants privilégiés des éléments non nuls de  $I$ , puis:

- $p =$  le degré minimum des éléments non nuls de  $I$ ,
- pour  $j \geq p$ ,  $\alpha_j =$  la valuation minimum des éléments de  $I$  de degré  $j$ .  
Du fait que  $I$  est un idéal à gauche, en appliquant la règle  $\exp(QP) = \exp(Q) + \exp(P)$ , on s'aperçoit que  $\text{Exp}(I) + \mathbf{N}^2 = \text{Exp}(I)$  et en particulier que la suite  $(\alpha_j)_{j \geq p}$  est décroissante;
- $q = \inf\{j \mid \alpha_j = \alpha_{j+1} = \dots\}$ .

En regroupant ces définitions on obtient la caractérisation de l'escalier  $\text{ES}(I)$  d'un idéal  $I$ :

$$\begin{aligned} \text{ES}(I) &= \{(\alpha_p, p); (\alpha_{p+1}, p+1); \dots; (\alpha_q, q)\}, \\ \text{Exp}(I) &= \left( \bigcup_{p \leq j < q} \{(\alpha_j, j) + \mathbf{N} \times \{0\}\} \right) \cup \{(\alpha_q, q) + \mathbf{N}^2\}, \end{aligned}$$

(où  $\cup$  désigne la réunion disjointe).

Nous appelons *base standard de  $I$*  un système  $\{F_p, F_{p+1}, \dots, F_q\}$  d'éléments de  $I$  tels que  $p \leq j \leq q$ ,  $\exp(F_j) = (\alpha_j, j)$ .

PROPOSITION 2 (division par un idéal). *Etant donné un idéal  $I$  non nul de  $\mathcal{D}$  d'escalier  $\{(\alpha_p, p); \dots; (\alpha_q, q)\}$  de base standard  $\{F_p, F_{p+1}, \dots, F_q\}$ , et un élément  $A$  de  $\mathcal{D}$ , il existe un système unique  $(Q_p, \dots, Q_{q-1}) \in \mathbf{C}\{x\}^{q-p}$ ,  $Q_q \in \mathcal{D}$ ,  $R \in \mathcal{D}$  tel que:*

$$\begin{cases} A = Q_p F_p + \dots + Q_q F_q + R, \\ R = \sum_{l=p}^{d(A)} \sum_{k=0}^{\alpha_l-1} r_{k,l} x^k D^l + S, \quad d(S) < p, \quad r_{k,l} \in \mathbf{C}. \end{cases}$$

De plus  $A \in I$  si et seulement si  $R = 0$ .

*Preuve.* En ce qui concerne l'existence, on commence par diviser  $A$  par  $F_q$  suivant le lemme 1, puis en faisant le premier pas de la division du reste obtenu successivement par  $F_{q-1}, \dots, F_p$ .

Pour l'unicité, on constate que les conditions imposées sur le reste impliquent  $\exp(R) \notin \text{Exp}(I)$  pour  $R$  non nul; par conséquent:  $A \in I \Leftrightarrow R = 0$ . Les détails sont laissés au lecteur.

Une base standard de  $I$  forme donc un système de générateurs de  $I$ ; comme d'habitude, une base standard plus belle que les autres s'obtient en faisant la division de  $x^{\alpha_j} D^j$  par  $\{F_p, \dots, F_q\}$ : en notant  $R_j$  le reste obtenu,

$$\{G_p = x^{\alpha_p} D^p - R_p, \dots, G_q = x^{\alpha_q} D^q - R_q\}$$

est la base standard en question.

Lorsque l'on filtre  $\mathcal{D}$  par le degré, on note  $\text{gr}\mathcal{D} = \mathbf{C}\{x\}[[\xi]]$  le gradué associé et  $\text{gr}I$  l'idéal homogène engendré par les symboles principaux des éléments de  $I$ ; par définition de  $\text{Exp}(I)$ ,  $\text{gr}I$  est engendré par les monômes  $(x^{\alpha_j} \xi^j)_{p \leq j \leq q}$ . Cela permet en particulier de calculer, en fonction de l'escalier de  $I$ :

$$\dim_{\mathbf{C}} \frac{\mathbf{C}\{x\}[[\xi]]}{\text{gr}I + (x, \xi)^n} = \# \{(\alpha, j) \in \mathbf{N}^2 \mid (\alpha, j) \notin \text{Exp}(I) \text{ et } \alpha + j < n\}.$$

Ainsi la multiplicité de la variété caractéristique  $V(\mathcal{D}/I)$  définie par  $\text{gr}I$  au voisinage de 0 dans  $\mathbf{C}^2$  est  $\alpha_q + p$ : il s'agit de la multiplicité de  $\mathcal{D}/I$  à l'origine (voir [L]).

#### I.B. RELATIONS ENTRE LES ÉLÉMENTS D'UNE BASE STANDARD

$I$  désigne toujours un idéal non nul de  $\mathcal{D}$  d'escalier  $\{(\alpha_p, p); \dots; (\alpha_q, q)\}$  et  $(F_p, \dots, F_q)$  une base standard de  $I$  que nous supposons désormais normalisée:

$$d(F_j - x^{\alpha_j} D^j) < j \quad \text{pour } j = p, \dots, q.$$

Par division de  $x^{\alpha_{j-1} - \alpha_j} F_j$  par  $\{F_{j-1}, \dots, F_p\}$  nous obtenons les relations

$$\mathcal{R}_j: x^{\alpha_{j-1} - \alpha_j} F_j = (D + u_{j,j-1})F_{j-1} + u_{j,j-2}F_{j-2} + \dots + u_{j,p}F_p \quad (u_{j,k} \in \mathbf{C}\{x\}),$$

pour tout  $p + 1 \leq j \leq q$ .

PROPOSITION 3. Les relations  $(\mathcal{R}_j)_{p+1 \leq j \leq q}$  forment une base des relations entre les éléments de la base  $(F_p, \dots, F_q)$  de  $I$  et on a la résolution libre de  $I$  comme  $\mathcal{D}$ -module à gauche :

$$0 \rightarrow \mathcal{D}^{q-p} \xrightarrow{\mathcal{R}} \mathcal{D}^{q-p+1} \rightarrow I \rightarrow 0.$$

Preuve. La matrice  $\mathcal{R}$  des relations  $(\mathcal{R}_j)_{p+1 \leq j \leq q}$  est la transposée de la matrice

$$\begin{bmatrix} D + u_{p+1,p} & u_{p+2,p} & \cdot & \cdot & \cdot & u_{q,p} \\ -x^{\alpha_p - \alpha_{p+1}} & D + u_{p+2,p+1} & & & & \cdot \\ 0 & -x^{\alpha_{p+1} - \alpha_{p+2}} & & & & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & & & u_{q,q-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & D + u_{q,q-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -x^{\alpha_{q-1} - \alpha_q} \end{bmatrix}$$

et ces relations sont donc libres.

Soit  $A_p F_p + A_{p+1} F_{p+1} + \dots + A_q F_q = \Theta$  une relation ; étant donnés deux entiers  $k$  et  $l, k \geq 0, p \leq l \leq q+1$ , nous dirons que la relation  $\mathcal{A} = (A_p, \dots, A_q)$  est dans  $\Omega_{k,l}$  si :

$$\begin{aligned} d(A_j) &\leq k && \text{pour } l \leq j \leq q, \\ d(A_j) &< k && \text{pour } p \leq j < l. \end{aligned}$$

Nous allons montrer par récurrence la propriété  $\omega_{k,l}$  : toute relation appartenant à  $\Omega_{k,l}$  est engendrée par les relations  $(\mathcal{R}_j)_{p+1 \leq j \leq q}$ . Par des considérations de degré la propriété  $\omega_{0,p}$  est vraie ainsi que l'implication  $\omega_{k-1,p} = \omega_{k,q+1} \Rightarrow \omega_{k,q}$ .

Il ne reste donc plus qu'à démontrer que  $\omega_{k,l+1}$  entraîne  $\omega_{k,l}$  pour  $p \leq l < q$  et  $k \geq 1$ . Or si  $\mathcal{A} = (A_p, \dots, A_q)$  est une relation appartenant à  $\Omega_{k,l}$  on peut écrire  $A_l = b D^k + A'_l$  avec  $b \in \mathbf{C}\{x\}$  et  $d(A'_l) < k$  ; alors  $\mathcal{A} - b D^{k-1} \mathcal{R}_{l+1}$  appartient à  $\Omega_{k,l+1}$  ce qui permet d'appliquer l'hypothèse de récurrence.

Nous allons maintenant montrer que  $F_p$  et  $F_q$  engendrent l'idéal  $I$  ; pour cela nous utilisons un lemme classique (voir [P], lemme 10.3.1, p. 95).

LEMME 4. Soit  $M$  un  $\mathcal{D}$ -module à gauche tel que le  $\mathbf{C}\{x\}$ -module sous-jacent soit de type fini ; alors  $M$  est un  $\mathbf{C}\{x\}$ -module libre.

Preuve. La démonstration étant très rapide nous nous permettons de la recopier. Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  un système de générateur de  $M$  sur  $\mathbf{C}\{x\}$  induisant

une base de l'espace vectoriel  $M/(x)M$  (possible par le lemme de Nakayama). Supposons l'existence d'une relation  $\sum_{i=1}^p u_i e_i = 0$  entre les générateurs à coefficients dans  $\mathbf{C}\{x\}$  d'ordre  $\omega = \text{minimum des valuations des coefficients } u_i \text{ non nuls}$ ; en appliquant  $D$  on trouve la relation

$$\sum_{i=1}^p (u_i D + u'_i) e_i = \sum_{i=1}^p u'_i e_i + \sum_{i=1}^p u_i \left( \sum_{k=1}^p v_{ik} e_k \right) = 0$$

(en prenant  $D e_i = \sum_{k=1}^p v_{ik} e_k$ ); on peut l'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^p (u'_i + \sum_{j=1}^p u_j v_{ji}) e_i = 0.$$

où on s'aperçoit que c'est une relation d'ordre  $\omega - 1$ . Une relation d'ordre 0 étant impossible, le lemme est démontré.

PROPOSITION 5. Soit  $I$  un idéal non nul de  $\mathcal{D}$ , d'escalier

$$\{(\alpha_p, p); \dots; (\alpha_q, q)\},$$

et soit  $\{F_p, \dots, F_q\}$  une base standard :

- a)  $q = p$  équivaut à  $I$  monogène, et  $I = \mathcal{D}F_p$ ;
- b)  $q > p$  alors  $I = \mathcal{D}F_p + \mathcal{D}F_q$ .

Preuve. Introduisons le  $\mathcal{D}$ -module  $M = I/(\mathcal{D}F_p + \mathcal{D}F_q)$ . En appliquant la proposition 2, tout élément  $A$  de  $I$  s'écrit

$$A = Q_p F_p + \dots + Q_{q-1} F_{q-1} + Q_q F_q,$$

où  $(Q_p, \dots, Q_{q-1})$  sont dans  $\mathbf{C}\{x\}$ ;  $M$  est donc un  $\mathbf{C}\{x\}$ -module de type fini (engendré par  $F_{p+1}, \dots, F_{q-1}$ ).

D'autre part, pour tout élément  $A$  de  $I$ , il existe un entier  $\alpha$  et  $B \in \mathcal{D}$  tels que  $x^\alpha A = B F_p$ ; il suffit pour cela de diviser  $x^\alpha A$  par  $F_p$  (lemme 1) et de se souvenir de la définition de l'escalier de  $I$ .

Ainsi  $M = 0$  d'après le lemme 4.

### I.C. SOLUTIONS ANALYTIQUES ET MICRO-FONCTIONS

Notons, pour  $\varepsilon > 0$ :

$$D_\varepsilon = \{x \in \mathbf{C} \mid |x| < \varepsilon\},$$

$$\dot{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbf{C} \mid 0 < |x| < \varepsilon\},$$

$\tilde{D}_\varepsilon = \{x \in \mathbf{C} \mid \text{Re}(x) < \text{Log} \varepsilon\}$  le revêtement universel du disque pointé muni de sa projection  $\pi: \tilde{D}_\varepsilon \rightarrow \dot{D}_\varepsilon: \pi(y) = e^y$ .

On considère les espaces de fonctions analytiques  $\mathcal{O}(D_\varepsilon) \subset \mathcal{O}(\dot{D}_\varepsilon)$  comme sous-espaces (par  $\pi^*$ ) de l'espace des fonctions analytiques multiforme  $\mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)$  sur  $\dot{D}_\varepsilon$ .

Les opérateurs différentiels à coefficients analytiques dans  $D_\varepsilon$  opèrent de manière naturelle sur  $\mathcal{O}(D_\varepsilon)$ ,  $\mathcal{O}(\dot{D}_\varepsilon)$  et  $\mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)$ :

$$\begin{cases} a(x) \cdot f(y) = a(e^y) f(y), \\ D \cdot f(y) = f'(y) e^{-y}. \end{cases}$$

Et cette action commute avec la monodromie:

$$M \cdot f(y) = f(y + 2i\pi),$$

monodromie laissant fixe les éléments de  $\mathcal{O}(\dot{D}_\varepsilon)$ .

Enfin on peut définir le morphisme de variation  $v: \mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)/\mathcal{O}(D_\varepsilon) \rightarrow \mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)$  par:

$$v \cdot f(y) = (M - id) \cdot f(y) = f(y + 2i\pi) - f(y).$$

En définitive, en passant à la limite inductive pour  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on construit un couple de  $\mathcal{D}$ -modules:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \lim_{\rightarrow} \mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon), \\ \mathcal{M} &= \lim_{\rightarrow} \mathcal{O}(\tilde{D}_\varepsilon)/\mathcal{O}(D_\varepsilon) \end{aligned}$$

muni des applications  $\mathbf{C}$ -linéaires:

$$\mathcal{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \\ \mathcal{M} \end{array}$$

$$\begin{cases} u \text{ application canonique de passage au quotient,} \\ v \text{ morphisme de variation,} \end{cases}$$

qui commutent avec les actions  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{M}$ . De plus  $v \circ u + id$  et  $u \circ v + id$  sont les morphismes de monodromie sur  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{M}$  respectivement.

On appelle solution analytique d'un idéal  $I$  de  $\mathcal{D}$  un élément  $f$  de  $\mathcal{A}$  annulé par les opérateurs appartenant à  $I$ , et on note  $E(I) \subset \mathcal{A}$  le sous-espace vectoriel des solutions analytiques de  $I$ ; on définit de même le sous-espace  $F(I) \subset \mathcal{M}$  des solutions micro-fonctions de  $I$ . En un mot, on obtient le couple

$$E(I) \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \\ F(I) \end{array}$$

des solutions de  $I$ .



PROPOSITION 6. Soit  $I$  un idéal non nul de  $\mathcal{D}$ , d'escalier

$$\{(\alpha_p, p); \dots; (\alpha_q, q)\}, \{F_p, \dots, F_q\}$$

une base standard de  $I$ ,  $E(I)$  et  $F(I)$  les espaces de solutions analytiques et micro-fonctions de  $I$ :

- a)  $\dim E(I) = p$  et les solutions analytiques de  $I$  sont les solutions analytiques de  $F_p$ .
- b)  $\dim F(I) = \alpha_q$  et les solutions micro-fonctions de  $I$  sont les solutions micro-fonctions de  $F_q$ .
- c) Etant données une base  $(f_1, \dots, f_p)$  de  $E(I)$  et une base

$$(\langle g_1 \rangle, \dots, \langle g_{\alpha_q} \rangle)$$

de  $F(I)$ , le morphisme canonique

$$\mathcal{D}/I \xrightarrow{\eta} \mathcal{D} \left[ (f_1, \dots, f_p), (\langle g_1 \rangle, \dots, \langle g_{\alpha_q} \rangle) \right] \subset \mathcal{A}^p \oplus \mathcal{M}^{\alpha_q}$$

est un isomorphisme de  $\mathcal{D}$ -modules.

*Preuve.* a) Par les théorèmes classiques sur les équations différentielles, nous savons que l'espace des solutions analytiques de  $F_p$  est de dimension  $p$ ; il nous suffit donc de montrer que toute solution analytique de  $F_p$  est solution de  $F_q$  (proposition 5). Par division (lemme 1) nous savons qu'il existe  $\alpha$  entier et  $Q \in \mathcal{D}$  tel que  $x^\alpha F_q = Q F_p$ ; on en déduit que  $F_p \cdot f = 0$  implique  $x^\alpha F_q \cdot f = 0$  donc  $F_q \cdot f = 0$  pour  $f \in \mathcal{A}$ .

b) Les relations entre les éléments de la base standard (proposition 3) peuvent s'écrire:

$$D \begin{bmatrix} F_p \\ F_{p+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{q-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_p \\ F_{p+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{q-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ x^{\alpha_q-1} F_q \end{bmatrix}$$

où  $A$  est la matrice à coefficients analytiques:

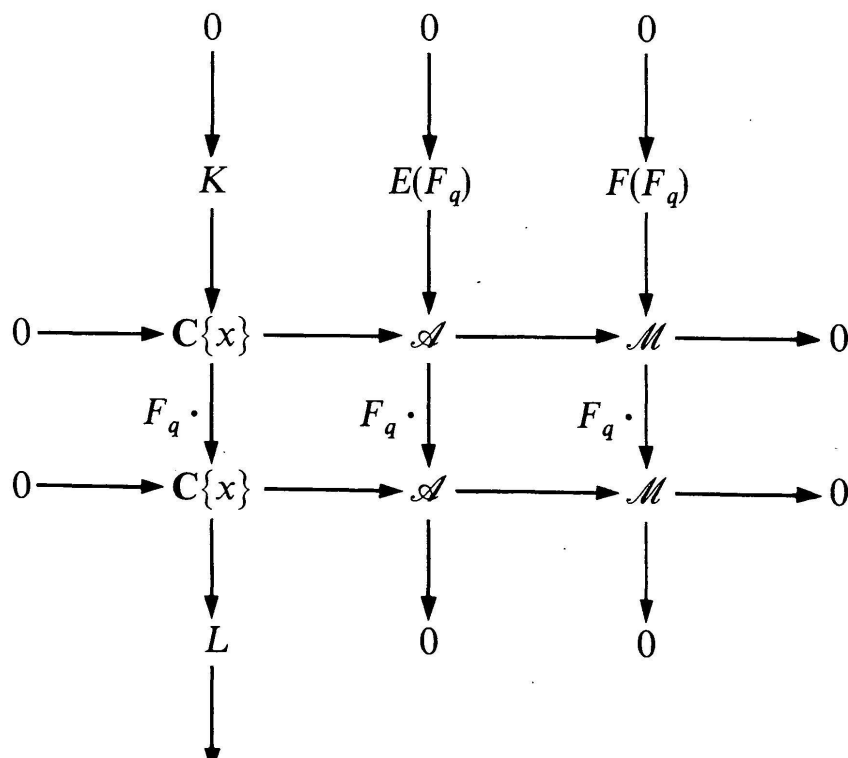
$$\begin{bmatrix} -u_{p+1,p} & x^{\alpha_p - \alpha_{p+1}} 0 & & 0 \\ & \cdot & & 0 \\ -u_{p+2,p} & & \cdot & \\ \cdot & & & x^{\alpha_{q-2} - \alpha_{q-1}} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ -u_{q,p} & \cdot & \cdot & -u_{q,q-1} \end{bmatrix}$$

si  $\langle g \rangle$  est une solution micro-fonction de  $F_q$ ,  $F_q g$  est analytique et :

$$D \begin{bmatrix} F_p \cdot g \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{q-1} \cdot g \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F_p \cdot g \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_{q-1} \cdot g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ x^{\alpha_{q-1} - \alpha_q} F_q \cdot g \end{bmatrix}$$

Ce qui signifie que  $(F_p \cdot g, \dots, F_{q-1} \cdot g)$  est solution du système différentiel analytique au voisinage de 0; donc  $F_p \cdot g$  est analytique et  $F_p \langle g \rangle = 0$ . C'est-à-dire que toute solution micro-fonction de  $F_q$  est solution micro-fonction de  $I$ .

Il nous reste à montrer que la dimension de l'espace des solutions micro-fonctions de  $F_q = x^{\alpha_q} D^q + \dots$  est  $\alpha_q$ ; on a le diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes et les colonnes sont exactes :



D'après le théorème de l'indice de B. Malgrange ( $[M_1]$  et  $[M_3]$ )  $\dim K - \dim L = q - \alpha_q$ , et on a vu au point a) que  $\dim E(F_q) = q$ ; le lemme du serpent fournit alors  $\dim F(F_q) = \alpha_q$ .

c) Si  $P \in \mathcal{D}$  non nul donne par passage au quotient par  $I$  un élément du noyau de  $\eta$ ,  $P$  a au moins  $p$  solutions analytiques indépendantes et  $\alpha_q$  solutions micro-fonctions indépendantes; d'après les parties a) et b) appliquées à  $\mathcal{D}P$ , l'exposant privilégié de  $P$  est dans  $(\alpha_q, p) + \mathbf{N}^2$ . En divisant par  $F_q$  on voit alors que  $\text{Ker } \eta$  est un  $\mathbf{C}\{x\}$ -module de type fini; d'autre part, il existe un entier  $\alpha$  tel que  $x^\alpha P$  soit multiple de  $F_p$ . Le lemme 4 implique  $\text{Ker } \eta = 0$ .

On obtient comme corollaire l'inégalité de Bernstein sur la dimension de la variété caractéristique d'un  $\mathcal{D}$ -module, dans notre cas bien particulier :

**COROLLAIRE 7.** *Si  $I$  est un idéal de  $\mathcal{D}$  tel que  $p = \dim E(I) = 0$  et  $\alpha_q = \dim F(I) = 0$ , alors  $I = \mathcal{D}$ .*

**COROLLAIRE 8.** *Si  $I_1, I_2, \dots, I_r$  sont des idéaux de  $\mathcal{D}$  vérifiant*

$$E = E(I_1) + \dots + E(I_r) = E(I_1) \oplus E(I_2) \dots \oplus E(I_r),$$

$$F = F(I_1) + \dots + F(I_r) = F(I_1) \oplus F(I_2) \dots \oplus F(I_r),$$

alors l'injection canonique

$$\frac{\mathcal{D}}{I_1 \cap I_2 \dots \cap I_r} \rightarrow \frac{\mathcal{D}}{I_1} \oplus \frac{\mathcal{D}}{I_2} \dots \oplus \frac{\mathcal{D}}{I_r}$$

est un isomorphisme et  $E(I_1 \cap I_2 \dots \cap I_r) = E$ ,  $F(I_1 \cap I_2 \dots \cap I_r) = F$ .

*Preuve.* Par induction on est ramené à démontrer le corollaire pour  $r = 2$ ; on remarque que  $E(I_1 + I_2) = E(I_1) \cap E(I_2) = 0$  et  $F(I_1 + I_2) = F(I_1) \cap F(I_2) = 0$  par hypothèse; d'après le corollaire 7,  $I_1 + I_2 = \mathcal{D}$  et de la suite exacte

$$0 \rightarrow \frac{\mathcal{D}}{I_1 \cap I_2} \rightarrow \frac{\mathcal{D}}{I_1} \oplus \frac{\mathcal{D}}{I_2} \rightarrow \frac{\mathcal{D}}{I_1 + I_2} \rightarrow 0$$

on tire l'isomorphisme cherché.

D'autre part on a toujours  $E(I_1 \cap I_2) \supset E(I_1) + E(I_2)$  et  $F(I_1 \cap I_2) \supset F(I_1) + F(I_2)$ . Choisissons  $A_1 \in I_1$  et  $A_2 \in I_2$  tels que  $1 = A_1 + A_2$ ; alors pour tout  $\varphi \in E(I_1 \cap I_2)$ ,  $\varphi = A_1 \varphi + A_2 \varphi$ . Si  $P_1$  est dans  $I_1$ ,  $P_1 A_2 = P_1 - P_1 A_1$  appartient à  $I_1 \cap I_2$  et donc  $P_1 A_2 \varphi = 0$  ce qui prouve que  $A_2 \varphi \in E(I_1)$ . On montrerait de même que  $A_1 \varphi \in E(I_2)$  et en conséquence que  $E(I_1 \cap I_2) = E(I_1) + E(I_2)$ . Le raisonnement est identique pour  $F(I_1 \cap I_2) = F(I_1) + F(I_2)$ .

## II. IDÉAUX À SINGULARITÉ RÉGULIÈRE

Définissons une nouvelle filtration de  $\mathcal{D}$ : si  $P = \sum_{\substack{l \leq d \\ k \geq 0}} a_{k,l} x^k D^l$ , où  $a_{k,l} \in \mathbf{C}$ ,

est un élément non nul de  $\mathcal{D}$ ,

le poids de  $P$  est l'entier  $p(P) \in \mathbf{Z}$ :

$$p(P) = \inf\{k-l \mid a_{k,l} \neq 0\},$$

la forme initiale de  $P$  est:

$$\text{in}(P) = \sum_{k-l=p(P)} a_{k,l} x^k D^l.$$

Remarquons que d'après B. Malgrange [M<sub>1</sub>] et [M<sub>3</sub>],  $-p(P)$  est l'indice de l'opérateur formel  $P: \mathbf{C}[[x]] \rightarrow \mathbf{C}[[x]]$ , tandis que l'indice de l'opérateur analytique  $P: \mathbf{C}\{x\} \rightarrow \mathbf{C}\{x\}$  est  $d(P) - v(P)$ ; et  $P$  est à singularité régulière si  $p(P) = v(P) - d(P)$  (c'est-à-dire si  $P$  et  $\text{in}(P)$  ont même degré).

On a les formules habituelles de multiplication:

$$p(P_1 \cdot P_2) = p(P_1) + p(P_2), \quad \text{in}(P_1 \cdot P_2) = \text{in}(P_1) \cdot \text{in}(P_2),$$

et d'addition:

$$\text{si } p(P_1) < p(P_2), \quad p(P_1 + P_2) = p(P_1) \quad \text{et} \quad \text{in}(P_1 + P_2) = \text{in}(P_1)$$

$$\text{si } p(P_1) = p(P_2), \quad \text{et} \quad \text{in}(P_1) + \text{in}(P_2) \neq 0, \quad p(P_1 + P_2) = p(P_1)$$

$$\text{et} \quad \text{in}(P_1 + P_2) = \text{in}(P_1) + \text{in}(P_2)$$

$$\text{si } p(P_1) = p(P_2) \quad \text{et} \quad \text{in}(P_1) + \text{in}(P_2) = 0, \quad p(P_1 + P_2) > p(P_1).$$

Nous disons qu'un élément de  $\mathcal{D}$  est *homogène* s'il est égal à sa forme initiale, et qu'un idéal  $J$  de  $\mathcal{D}$  est *homogène* s'il admet un système de générateurs homogènes.

A un idéal  $I$  de  $\mathcal{D}$  on peut associer son idéal initial  $\text{in}(I)$  homogène engendré par les formes initiales des éléments de  $I$ .

Si  $J$  est un idéal homogène de  $\mathcal{D}$ , tout élément non nul de  $J$  a sa forme initiale dans  $J$ ; réciproquement si  $I$  est un idéal de  $\mathcal{D}$  vérifiant cette propriété,  $\text{in}(I) \subset I$ , le reste de la division d'un élément de  $I$  par  $\text{in}(I)$  ne peut qu'être nul:  $\text{in}(I) = I$  et  $I$  est homogène.

LEMME 9. Soit  $I$  un idéal non nul de  $\mathcal{D}$  d'escalier  $\{(\alpha_p, p), \dots, (\alpha_q, q)\}$  et  $\{F_p, \dots, F_q\}$  une base standard de  $I$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes:

- i) il existe un élément  $P \in I$  à singularité régulière (non nul),
- ii) les éléments  $F_p, \dots, F_q$  de la base standard sont à singularité régulière,
- iii)  $\text{in}(I)$  et  $I$  ont même escalier.

Lorsque ces propriétés sont satisfaites, nous dirons que  $I$  est un idéal à singularité régulière; dans ce cas, nous savons d'après [W] par exemple que les solutions analytiques  $E(I) = E(F_p)$  de  $I$  sont de classe de Nilsson (de détermination finie, à croissance modérée; l'écriture explicite sera rappelée en II.B) ainsi que les solutions micro-fonctions  $F(I) = F(F_q)$ .

Démontrons le lemme 9 :

(i)  $\Rightarrow$  (ii). Par division (lemme 1) il existe un entier  $\alpha$  tel que  $x^\alpha P = QF_p$ ; donc

$$\text{in}(x^\alpha P) = \text{in}(Q) \text{in}(F_p), \quad d(\text{in}Q) \leq d(Q), \quad d(\text{in}F_p) \leq d(F_p) = p$$

et par hypothèse

$$d(\text{in}(x^\alpha P)) = d(\text{in}(P)) = d(P) = d(Q) + d(F_p).$$

Cela prouve que  $d(\text{in}Q) = d(Q)$  et  $d(\text{in}F_p) = p$  et en particulier que  $F_p$  est à singularité régulière.

Montrons maintenant que  $F_j$  est à singularité régulière pour  $j \geq p + 1$ , en supposant que  $F_p, \dots, F_{j-1}$  le sont; la relation  $\mathcal{R}_j$  (proposition 3) est

$$x^{\alpha_{j-1} - \alpha_j} F_j = (D + u_{j,j-1})F_{j-1} + u_{j,j-2}F_{j-2} + \dots + u_{j,p}F_p$$

et les formules d'addition et de multiplication donnent

$$\text{in}(x^{\alpha_{j-1} - \alpha_j} F_j) = D \text{in}(F_{j-1}).$$

$\text{in}(F_j)$  est donc de degré  $j$  et par conséquent  $F_j$  est à singularité régulière.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii). De manière évidente  $\text{Exp}(\text{in}(I)) \supset \text{Exp}(I)$  puisque pour tout opérateur  $P$  de  $\mathcal{D}$ ,  $\exp(P) \in \exp(\text{in}(P)) + \mathbf{N}^2$ .

Prenez alors  $P$  dans  $I$ ; par division (proposition 2),  $P$  s'écrit

$$P = Q_p F_p + \dots + Q_q F_q, \quad (Q_p, \dots, Q_{q-1}) \in \mathbf{C}\{x\}^{q-p}, \quad Q_q \in \mathcal{D}.$$

Par simple considération des degrés, toute relation

$$R_p \text{in}(F_p) + \dots + R_q \text{in}(F_q) = 0, \quad (R_p, \dots, R_{q-1}) \in \mathbf{C}\{x\}^{q-p}, \quad R_q \in \mathcal{D},$$

implique  $R_p = \dots = R_q = 0$ ; donc en fait  $\text{in}(F_p), \dots, \text{in}(F_q)$  est un système de générateurs de  $\text{in}(I)$  avec comme base des relations

$$\mathcal{R}'_j: x^{\alpha_{j-1} - \alpha_j} \text{in}(F_j) = D \text{in}(F_{j-1}), \quad p + 1 \leq j \leq q.$$

Grâce à ces relations, un élément  $P$  de  $\text{in}(I)$  peut s'écrire

$$P = R_p \text{in}(F_p) + \dots + R_q \text{in}(F_q),$$

$(R_p, \dots, R_{q-1}) \in \mathbf{C}\{x\}^{q-p}$ ,  $R_q \in \mathcal{D}$ ; l'exposant de  $P$  est alors égal à l'exposant du terme de plus haut degré dans cette somme. Donc  $\text{in}(I)$  et  $I$  ont même escalier.

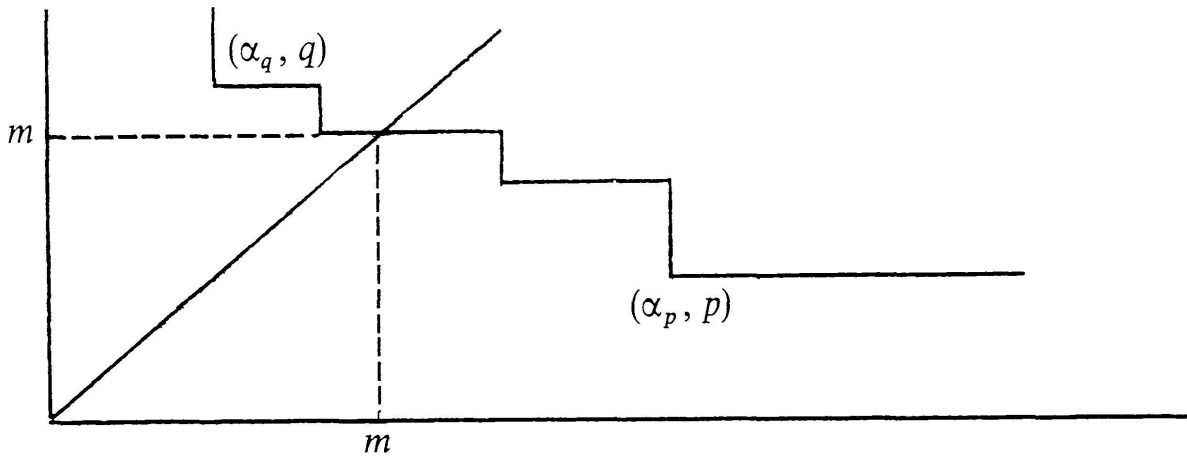
(iii)  $\Rightarrow$  (i). Une application élémentaire des définitions:

$$\exp(\text{in}(F_p)) = \exp(F_p) \quad \text{et} \quad F_p$$

est à singularité régulière.

## II.A. IDÉAUX HOMOGENES

Etant donné un escalier  $\tilde{\alpha} = \{(\alpha_p, p), \dots, (\alpha_q, q)\}$  on note  $m = m(\tilde{\alpha})$  le plus petit des entiers  $j$  tels que  $(j, j) \in \text{Exp}(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha} + \mathbf{N}^2$ .



On convient de poser  $\alpha_j = \alpha_q$  lorsque  $j \geq q$  et alors  $m = \inf \{j \mid j \geq p \text{ et } j \geq \alpha_j\}$ . A l'escalier  $\tilde{\alpha}$  nous associons les ensembles d'entiers suivants:

$$A(\tilde{\alpha}) = \{0, 1, 2, \dots, q - \alpha_q\} - \{m - \alpha_m, (m+1) - \alpha_{m+1}, \dots, q - \alpha_q\}$$

lorsque  $\alpha_q \leq q$ , et  $A(\tilde{\alpha}) = \emptyset$  sinon. Les éléments de  $A(\tilde{\alpha})$  sont des entiers  $\geq 0$  en nombre égal à  $m - \alpha_q$ .

$$B(\tilde{\alpha}) = \{-(\alpha_p - p), -(\alpha_{p+1} - (p+1)), \dots, -(\alpha_{m-1} - (m-1))\}$$

lorsque  $\alpha_p > p$ , et  $B(\tilde{\alpha}) = \emptyset$  sinon. Ce sont des entiers strictement négatifs en nombre égal à  $m - p$ .

LEMME 10. Si  $m = m(\tilde{\alpha}) = p + \alpha_q$ , il existe un unique idéal homogène  $H(\tilde{\alpha})$  admettant  $\tilde{\alpha}$  pour escalier;  $H(\tilde{\alpha})$  est défini par ses solutions:

$$\begin{cases} E(H(\tilde{\alpha})) = \bigoplus_{k \in A(\tilde{\alpha})} \mathbf{C}x^k, \\ F(H(\tilde{\alpha})) = \bigoplus_{k \in B(\tilde{\alpha})} \mathbf{C} \langle x^k \rangle. \end{cases}$$

*Preuve.* L'espace des éléments homogènes de poids 0 s'identifie à l'anneau commutatif  $\mathbf{C}[xD]$ ; pour  $P \in \mathbf{C}[xD]$  et  $n \in \mathbf{Z}$  on note  $P^{[n]}$  le polynôme défini par  $P^{[n]}(xD) = P(xD + n)$ .

Pour  $n \in \mathbf{N}$  on a le formulaire suivant

$$\begin{aligned}x^n P &= P^{[-n]} x^n, \\D^n P &= P^{[n]} D^n, \\ \omega_n &= x^n D^n = xD(xD-1) \dots (xD-n+1), \\ \omega_n^{[n]} &= D^n x^n = (xD+1)(xD+2) \dots (xD+n).\end{aligned}$$

Il résulte de ce qui précède qu'un idéal homogène  $I$  de  $\mathcal{D}$  d'escalier  $\tilde{\alpha}$  admet une base standard  $F_p, \dots, F_q$  formée d'éléments homogènes liés par les relations

$$\mathcal{R}'_j: x^{\alpha_{j-1}-\alpha_j} F_j = DF_{j-1}, \quad p+1 \leq j \leq q.$$

$F_j$  admet l'écriture unique:

$$\begin{cases} F_j = D^{j-\alpha_j} P_j(xD) & \text{si } j \geq \alpha_j, \quad P_j \text{ de poids } 0 \text{ de degré } \alpha_j, \\ F_j = x^{\alpha_j-j} P_j(xD) & \text{si } j \leq \alpha_j, \quad P_j \text{ de poids } 0 \text{ de degré } j. \end{cases}$$

(a)<sub>j</sub> Pour  $j-1 \geq \alpha_{j-1}$  la relation  $\mathcal{R}'_j$  se traduit par

$$P_{j-1} = \omega_{\alpha_{j-1}-\alpha_j}^{[-j+\alpha_{j-1}]} P_j.$$

(b)<sub>j</sub> Pour  $j \leq \alpha_j$  on obtient

$$P_j = (xD + \alpha_{j-1} - (j-1)) P_{j-1}.$$

(c)<sub>j</sub> Pour  $j \geq \alpha_j$  et  $j-1 < \alpha_{j-1}$

$$\omega_{j-\alpha_j} P_j = (xD + \alpha_{j-1} - (j-1)) P_{j-1}.$$

Dans le cas  $m = p \geq \alpha_p$ , seules interviennent les relations (a)<sub>j</sub> pour  $p+1 \leq j \leq q$  et en itérant on obtient:

$$P_p = \left( \prod_{j=p+1}^q \omega_{\alpha_{j-1}-\alpha_j}^{[-j+\alpha_{j-1}]} \right) P_q.$$

L'hypothèse du lemme est alors  $\alpha_q = 0$ ,  $P_q = 1$  et on trouve

$$H(\tilde{\alpha}) = \mathcal{D}D^{p-\alpha_p} P_p + \mathcal{D}D^q = \mathcal{D}x^{p-\alpha_p} D^{p-\alpha_p} P_p + \mathcal{D}D^q$$

puisque ces idéaux n'ont pas de solutions micro-fonctions et les mêmes solutions analytiques. Il ne reste plus qu'à se convaincre que le polynôme

$$x^{p-\alpha_p} D^{p-\alpha_p} P_p = \omega_{p-\alpha_p} \prod_{j=p+1}^q \omega_{\alpha_{j-1}-\alpha_j}^{[-j+\alpha_{j-1}]}$$

a pour racines les entiers de  $A(\tilde{\alpha})$  et ces racines sont simples.

Dans le cas  $m = \alpha_q \geq q$ , de la même façon, en utilisant cette fois les formules (b)<sub>j</sub> on trouve

$$P_q = \left( \prod_{j=p}^{q-1} (xD + \alpha_j - j) \right) P_p.$$

L'hypothèse du lemme est alors  $p = 0$ , donc  $P_p = 1$  et

$$H(\tilde{\alpha}) = \mathcal{D}x^{\alpha_q - q} P_q + \mathcal{D}x^{\alpha_p} = \mathcal{D}D^{\alpha_q - q} x^{\alpha_q - q} P_q + \mathcal{D}x^{\alpha_p}$$

cet idéal n'ayant que des solutions micro-fonctions. Encore une fois il reste à vérifier que le polynôme

$$D^{\alpha_q - q} x^{\alpha_q - q} P_q = \left( \prod_{j=p}^{q-1} (xD + \alpha_j - j) \right) P_p$$

a pour racines les entiers de  $B(\tilde{\alpha})$  et que ces racines sont simples.

Dans le cas  $\alpha_p > p$  et  $\alpha_q < q$ , on a  $p + 1 \leq m \leq q$  et on obtient d'après (a) et (b):

$$P_m = \left( \prod_{j=m+1}^q \omega_{\alpha_{j-1} - \alpha_j}^{[-j + \alpha_{j-1}]} \right) P_q, \quad d(P_q) = \alpha_q,$$

$$P_{m-1} = \left( \prod_{j=p}^{m-2} (xD + \alpha_j - j) \right) P_p, \quad d(P_p) = p.$$

En utilisant maintenant (c)<sub>m</sub> on trouve:

$$\omega_{m - \alpha_m} P_m = (xD + \alpha_{m-1} - (m-1)) P_{m-1}$$

soit encore  $AP_q = BP_p$  où  $A$  est le polynôme unitaire admettant les éléments de  $A(\tilde{\alpha})$  pour racines simples, et  $B$  celui admettant les éléments de  $B(\tilde{\alpha})$  pour racines simples:

$$d(A) = m - \alpha_q, \quad d(B) = m - p.$$

$A$  et  $B$  étant premiers entre eux, on déduit l'inégalité  $d(P_q) = \alpha_q \geq d(B) = m - p$ , ainsi que l'existence d'un polynôme  $C \in \mathbb{C}[xD]$  de degré  $\delta = \alpha_q + p - m$  tel que

$$P_q = BC, \quad P_p = AC,$$

$$F_q = D^{q - \alpha_q} BC, \quad F_p = x^{\alpha_p - p} AC.$$

Le cas d'égalité du lemme donne  $\delta = 0$ , donc  $C = 1$  et  $H(\tilde{\alpha}) = \mathcal{D}x^{\alpha_p - p} A + \mathcal{D}D^{q - \alpha_q} B$ ; les solutions analytiques de  $H(\tilde{\alpha})$  sont celles de  $A$ , et les solutions micro-fonctions de  $H(\tilde{\alpha})$  sont celles de  $B$ . Enfin il est facile de vérifier que  $H(\tilde{\alpha})$  a bien les solutions indiquées dans l'énoncé du lemme, et a pour escalier  $\tilde{\alpha}$ .



Remarquons que  $m(\tilde{\alpha})$  est toujours supérieur ou égal à  $p$  et donc que l'escalier translaté  $\tilde{\alpha}^{[-\delta]} = \{(\alpha_p - \delta, p - \delta), \dots, (\alpha_q - \delta, q - \delta)\}$  est bien défini avec  $\delta = \alpha_q + p - m$ ; de plus  $A(\tilde{\alpha})$  et  $B(\tilde{\alpha})$  sont invariants par translation et  $m(\tilde{\alpha}^{[-\delta]}) = m(\tilde{\alpha}) - \delta$ . Nous avons donc obtenu :

**PROPOSITION 11.** Soit  $\tilde{\alpha} = \{(\alpha_p, p), \dots, (\alpha_q, q)\}$  un escalier,  $\delta = p + \alpha_q - m(\tilde{\alpha})$ ,  $\mathcal{H}(\tilde{\alpha})$  l'ensemble des idéaux homogènes d'escalier  $\tilde{\alpha}$ .

Pour  $\delta < 0$ ,  $\mathcal{H}(\tilde{\alpha}) = \emptyset$ .

Pour  $\delta = 0$ ,  $\mathcal{H}(\tilde{\alpha})$  est réduit au seul élément  $H(\tilde{\alpha})$ .

Pour  $\delta > 0$ , si on désigne par  $C^\delta[xD]$  l'ensemble des polynômes unitaires de degré  $\delta$ , l'application qui à  $C \in C^\delta[xD]$  associe l'idéal  $H(\tilde{\alpha}^{[-\delta]})C$  est une bijection sur  $\mathcal{H}(\tilde{\alpha})$ .

Soit  $C = \prod_{\lambda \in \Lambda} (xD - \lambda)^{r(\lambda)}$  la décomposition de  $C$  en convenant de prendre  $\Lambda \supset A(\tilde{\alpha}) \cup B(\tilde{\alpha})$  et  $r(\lambda) = 0$  si nécessaire. Avec les notations du lemme 10,

$$I = H(\tilde{\alpha}^{[-\delta]})C = \mathcal{D}x^{\alpha_p - p}AC + \mathcal{D}D^{q - \alpha_q}BC.$$

Pour  $\lambda \in A(\tilde{\alpha})$ , définissons

$$I(\lambda) = \mathcal{D}(xD - \lambda)^{r(\lambda) + 1} + \mathcal{D}D^{\lambda + 1}(xD - \lambda)^{r(\lambda)},$$

pour  $\lambda \in B(\tilde{\alpha})$ ,

$$I(\lambda) = \mathcal{D}(xD - \lambda)^{r(\lambda) + 1} + \mathcal{D}x^{-\lambda}(xD - \lambda)^{r(\lambda)}$$

et enfin pour  $\lambda \in \Lambda - A(\tilde{\alpha}) - B(\tilde{\alpha})$ ,  $I(\lambda) = \mathcal{D}(xD - \lambda)^{r(\lambda)}$ . On constate que  $E(I) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E(I(\lambda))$  et  $F(I) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} F(I(\lambda))$ ; d'après le corollaire 8,  $I = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I(\lambda)$  et  $\mathcal{D}/I$  est isomorphe à  $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{D}/I(\lambda)$ .

Par ailleurs la multiplication à droite par la classe de  $D^\lambda$  est un isomorphisme de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}D(xD)^{r(\lambda)}$  sur  $\mathcal{D}/I(\lambda)$  lorsque  $\lambda \in A(\tilde{\alpha})$ ; et pour  $\lambda \in B(\tilde{\alpha})$ , il faut multiplier à droite par la classe de  $x^{-\lambda-1}$  pour obtenir l'isomorphisme de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}x(Dx)^{r(\lambda)}$  sur  $\mathcal{D}/I(\lambda)$ . En conclusion, avec  $\Lambda' = \Lambda - A(\tilde{\alpha}) - B(\tilde{\alpha})$ :

**COROLLAIRE 12.** Soit  $I$  un idéal homogène d'escalier  $\tilde{\alpha}$ ,  $\delta = \alpha_q + p - m$ ,  $\mathcal{D}/I$  est isomorphe à

$$\left( \bigoplus_{i=1}^{m-\alpha_q} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}D(xD)^{r_i}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^{m-p} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x(Dx)^{r_j}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda'} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(xD - \lambda)^{r(\lambda)}} \right),$$

avec

$$\sum_{i=1}^{m-\alpha_q} r_i + \sum_{j=1}^{m-p} r_j + \sum_{\lambda \in \Lambda'} r(\lambda) = \delta.$$

Nous retrouvons le résultat de P. Strömbeck ([S], théorème 1, p. 120):

**COROLLAIRE 13.** *Soit  $I$  un idéal de  $\mathcal{D}$ ,  $p = \dim(E(I))$ ,  $\alpha_q = \dim(F(I))$  et  $m(I)$  le degré minimum d'un opérateur de  $I$  ayant autant de solutions analytiques que de solutions micro-fonctions; alors  $m(I) \leq p + \alpha_q$  et l'égalité n'est possible que si  $I$  est à singularité régulière.*

*Preuve.* Lorsque  $I$  est à singularité régulière, les escaliers de  $I$  et de  $\text{in}(I)$  sont identiques et le premier point de la proposition 11 donne le résultat cherché.

Supposons  $I$  non à singularité régulière, et notons  $(\alpha_p - u, p - v)$  l'exposant privilégié de  $\text{in}(F_p)$ ; son poids est

$$p(F_p) = \alpha_p - u - (p - v) < \alpha_p - p$$

et donc  $u > v > 0$ .

Les relations  $\mathcal{R}_j$  fournissent alors, pour  $p + 1 \leq j \leq q$ :

$$\begin{cases} p(F_j) = \alpha_j - j - (u - v), \\ x^{\alpha_j - 1 - \alpha_j} \text{in}(F_j) = D \text{in}(F_{j-1}). \end{cases}$$

La division d'un élément de  $I$  par  $F_p, \dots, F_q$  (proposition 2) permet alors de montrer que sa forme initiale est engendrée par  $\text{in}(F_p), \dots, \text{in}(F_q)$ . Il résulte de tout cela que  $\text{in}(I)$  a pour escalier

$$\{(\alpha_p - u, p - v), (\alpha_{p+1} - u, p + 1 - v), \dots, (\alpha_q - u, q - v)\},$$

et pour base standard  $\text{in}(F_p), \dots, \text{in}(F_q)$ . La proposition 11 appliquée à l'idéal homogène  $\text{in}(I)$  donne:

$$(*) \quad p - v + (\alpha_q - u) \geq m(\text{in}(I)).$$

Or, par translation,  $(m(\text{in}(I)) + u, m(\text{In}(I)) + v) \in \text{Exp}(I)$  d'où

$$m(\text{In}(I)) + u \geq \alpha_{m(\text{In}(I)) + v} \geq \alpha_{m(\text{In}(I)) + u}.$$

(La dernière égalité provenant de  $u \geq v$ ), et par définition de  $m(I)$ :

$$m(\text{In}(I)) + u \geq m(I).$$

En reportant dans (\*) on obtient facilement  $p + \alpha_q \geq m(I) + v > m(I)$ .

## II.B. DÉCOMPOSITION D'UN IDÉAL À SINGULARITÉ RÉGULIÈRE

Soit un diagramme  $E \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{smallmatrix} F$  où  $E$  et  $F$  sont des  $\mathbf{C}$  espaces vectoriels de dimension finie,  $u$  et  $v$  des morphismes d'espaces vectoriels. De tels diagrammes sont les objets d'une catégorie abélienne  $\Theta$  dont les flèches sont naturelles.

LEMME 14. *Tout objet  $E \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{smallmatrix} F$  de  $\Theta$  se décompose en une somme d'objets indécomposables  $E_{\lambda,l} \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{smallmatrix} F_{\lambda,l}$  (muni de flèches de restriction) où  $E_{\lambda,l}$  (resp.  $F_{\lambda,l}$ ) est un sous-espace irréductible maximal de  $E$  (resp.  $F$ ) stable par  $v \circ u$  (resp.  $u \circ v$ ) associé à la valeur propre  $\lambda$ . D'autre part si  $\lambda \neq 0$ ,  $u|_{E_{\lambda,l}}$  et  $v|_{F_{\lambda,l}}$  sont des isomorphismes, et si  $\lambda = 0$   $u|_{E_{\lambda,l}}$  ou  $v|_{F_{\lambda,l}}$  est surjective.*

Une fois connu ce résultat déjà employé par L. Boutet de Monvel ([BM]) et B. Malgrange ([M.2]) sa démonstration facile est laissée au lecteur (on regarde la correspondance entre les blocs de Jordan de  $E$  sous l'action de  $v \circ u$  et de  $F$  sous l'action de  $u \circ v$ ). Reprenons les notations de I.C et choisissons une détermination du logarithme. Une somme

$$\sum_{\alpha \in J} \left( \sum_{i=0}^{m_\alpha} f_{\alpha,i}(x) \text{Log}^i x \right) x^\alpha, \quad \text{où } f_{\alpha,i} \in \mathbf{C}\{x\},$$

et où  $J$  est un ensemble fini de nombres complexes ne différant pas d'un entier relatif, détermine un unique élément de  $\mathcal{A}$  et par action de  $u$  un unique élément de  $\mathcal{M}$ . De tels éléments sont appelés fonctions de classe de Nilsson et microfonctions de classe de Nilsson.

Soit  $I$  un idéal à singularité régulière; nous savons lui associer un élément de  $\Theta$ :  $E(I) \begin{smallmatrix} \xrightarrow{u} \\ \xleftarrow{v} \end{smallmatrix} F(I)$ . De plus les éléments de  $E(I)$  et  $F(I)$  sont des fonctions et des microfonctions de classe de Nilsson (voir la remarque suivant le lemme 9). Nous allons expliciter la décomposition d'un tel objet de  $\Theta$ :

$$(E(I); F(I)) = \bigoplus (E_{\lambda,l}; F_{\lambda,l}).$$

*Notation:*

$$I_{\lambda,l} = \{P \in \mathcal{D} \mid \forall (f, \langle g \rangle) \in E_{\lambda,l} \times F_{\lambda,l}, Pf = 0 \text{ et } P\langle g \rangle = 0\}.$$

D'après le lemme 13,  $E_{\lambda,l}$  (resp.  $F_{\lambda,l}$ ) est un sous-espace vectoriel de  $E(I)$  (resp. de  $F(I)$ ), indécomposable maximal stable par la monodromie  $M$  de  $\mathcal{A}$  (resp.  $M$  de  $\mathcal{M}$ ) et associé à la valeur propre  $\lambda + 1$  de cette monodromie. Un

calcul simple sur les fonctions de classe de Nilsson permet de déterminer une base de  $E_{\lambda, l}$  et  $F_{\lambda, l}$ :

Cas n° 1:  $\lambda \neq 0$ .

Une base de  $E_{\lambda, l} = \{(M - e^{2i\pi\alpha})^j f\}_{j \in \{0, \dots, r-1\}}$ ,  $\alpha \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}$  et  $\lambda + 1 = e^{2i\pi\alpha}$ ,  $(M - e^{2i\pi\alpha})^{r-1} f \neq 0$  et  $(M - e^{2i\pi\alpha})^r f = 0$ , où quitte à ajouter à  $\alpha$  un entier,  $f$  s'écrit:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} f_i(x) x^\alpha \text{Log}^i x, \quad f_i(x) \in \mathbf{C}\{x\},$$

$\dim E_{\lambda, r} = r$ , d'après le lemme 14:  $E_{\lambda, l} \xrightarrow[\cong]{u} F_{\lambda, l}$  donc  $\dim F_{\lambda, l} = r$ .

LEMME 15. Pour  $\lambda \neq 0$ :  $\mathcal{D}f = \mathcal{D}x^\alpha \text{Log}^{r-1} x$ ,  $\mathcal{D}/I_{\lambda, l} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(xD - \alpha)^r$  et  $E(I_{\lambda, l}) = E_{\lambda, l}$ ,  $F(I_{\lambda, l}) = F_{\lambda, l}$ .

*Preuve.* Tout d'abord un calcul facile établit:

$$(1) \quad \begin{aligned} & \forall p \in \mathbf{N}, \mathcal{D}x^{\alpha+p} \text{Log}^{r-1} x \\ &= \mathbf{C}\{x\} \left[ \frac{1}{x} \right] x^\alpha \text{Log}^{r-1} x + \dots + \mathbf{C}\{x\} \left[ \frac{1}{x} \right] x^\alpha. \end{aligned}$$

On en déduit l'inclusion  $\mathcal{D}f \subset \mathcal{D}x^\alpha \text{Log}^{r-1} x$ . Ecrivons:  $f_{r-1}(x) = u(x)x^k$ , où  $u(0) \neq 0$ ,  $u(x) \in \mathbf{C}\{x\}$  et  $k \in \mathbf{Z}$ .

$$\begin{aligned} & (xD - \alpha - k) \frac{1}{u(x)} f(x) \\ &= x^{\alpha+k} \text{Log}^{r-2} x + (xD - \alpha - k) \frac{f_{r-2}(x)}{u(x)} x^\alpha \text{Log}^{r-2} x + \dots \end{aligned}$$

Mais le terme de « degré »  $\alpha + k$  de  $\frac{f_{r-2}(x)}{u(x)} x^\alpha \text{Log}^{r-2} x$  est tué par  $(xD - \alpha - k)$ ,

$(xD - \alpha - k) \frac{1}{u(x)} f(x) = \sum_{i=0}^{r-2} g_i(x) x^\alpha \text{Log}^i x$  où  $g_i(x) \in \mathbf{C}\{x\}$  et  $g_{r-2}(x) \neq 0$ . Par récurrence, on montre ainsi que  $\mathcal{D}x^{\alpha+k} \text{Log}^{r-1} x$  est inclus dans  $\mathcal{D}f$ . D'où le résultat (en utilisant (1)):  $\mathcal{D}f = \mathcal{D}x^\alpha \text{Log}^{r-1} x$

$f$  engendre par  $u$  et  $v$ :  $E_{\lambda, l}$  et  $F_{\lambda, l}$ , de sorte que  $\mathcal{D}f \cong \mathcal{D}/I_{\lambda, l}$

$x^\alpha \text{Log}^{r-1} x$  est annulé par  $(xD - \alpha)^r$  et engendre par  $u$  et  $v$ ,  $r$  solutions analytiques et  $r$  solutions microfonctions indépendantes. En utilisant les propositions 5 et 6, on obtient:  $\mathcal{D}x^\alpha \text{Log}^{r-1} x \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(xD - \alpha)^r$ . On a donc  $\mathcal{D}/I_{\lambda, l} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(xD - \alpha)^r$ .

Cet isomorphisme entraîne :

$$\dim E(I_{\lambda,l}) = \dim E((xD - \alpha)^r) = r \text{ et } \dim F(I_{\lambda,l}) = \dim F((xD - \alpha)^r) = r.$$

Des inclusions  $E(I_{\lambda,l}) \supset E_{\lambda,l}$  et  $F(I_{\lambda,l}) \supset F_{\lambda,l}$ , on en déduit la dernière égalité cherchée.

Cas n° 2:  $\lambda = 0$  et  $u|_{E_{0,l}}$  surjective.

Une base de  $E_{0,l} = \{(M-1)^j f\}_{j \in \{0, \dots, r-1\}}$ ,  $(M-1)^r f = 0$ ,  $(M-1)^{r-1} f \neq 0$ , où  $f$  s'écrit

$$f(x) = \sum_{i=0}^{r-1} f_i(x) x^m \text{Log}^i x, \quad m \in \mathbf{Z} \text{ et } f_i(x) \in \mathbf{C}\{x\}.$$

$$\text{Or } (M-1)^{r-1} f(x) = (r-1)! (2i\pi)^{r-1} f_{r-1}(x) x^m,$$

$$(M-1)^{r-2} f(x) = (r-1)! (2i\pi)^{r-2} f_{r-1}(x) x^m \text{Log} x + x^m g(x),$$

où  $g(x) \in \mathbf{C}\{x\} \left[ \frac{1}{x} \right]$ . De sorte que :

si  $f_{r-1}(x) x^m \notin \mathbf{C}\{x\}$ ,  $u: E_{0,l} \rightarrow F_{0,l}$  est un isomorphisme et  $\dim E_{0,l} = \dim F_{0,l} = r$ ;

si  $f_{r-1}(x) x^m \in \mathbf{C}\{x\}$ ,  $\dim E_{0,l} = r$  et  $\dim F_{0,l} = r - 1$ .

LEMME 16. Pour  $\lambda = 0$  et  $u|_{E_{0,l}}$  surjective deux cas se présentent :

a)  $\dim E_{0,l} = \dim F_{0,l}$ , alors  $f_{r-1}(x) x^m \notin \mathbf{C}\{x\}$  et

$$\mathcal{D}f = \mathcal{D} \frac{1}{x} \text{Log}^{r-1} x, \quad \mathcal{D}/I_{0,l} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(Dx)^r,$$

b)  $\dim E_{0,l} = \dim F_{0,l} + 1$ , alors  $f_{r-1}(x) x^m \in \mathbf{C}\{x\}$  et

$$\mathcal{D}f = \mathcal{D} \text{Log}^{r-1} x, \quad \mathcal{D}/I_{0,l} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(Dx)^{r-1} D.$$

Dans les deux cas :

$$E(I_{0,l}) = E_{0,l} \text{ et } F(I_{0,l}) = F_{0,l}.$$

Preuve. On établit facilement que

$$\forall p \in \mathbf{N} - \{0\}, \quad \mathcal{D} \frac{1}{x^p} \text{Log}^{r-1} x = \mathbf{C}\{x\} \left[ \frac{1}{x} \right] \text{Log}^{r-1} x + \dots + \mathbf{C}\{x\} \left[ \frac{1}{x} \right],$$

$$\forall p \in \mathbf{N}, \quad \mathcal{D} x^p \text{Log}^{r-1} x$$

$$= \mathbf{C}\{x\} \text{Log}^{r-1} x + \mathbf{C}\{x\} \left[ \frac{1}{x} \right] \text{Log}^{r-2} x + \dots + \mathbf{C}\{x\} \left[ \frac{1}{x} \right].$$

La démonstration est alors analogue à celle du lemme 15.

Cas n° 3:  $\lambda = 0$   $v|_{F_{0,l}}$  surjective.

Une base de  $F_{0,l} = \{(M-1)^j \langle f \rangle\}_{j \in \{0, \dots, r-1\}}$  où  $\langle f \rangle = u(f)$ , et  $f$  s'écrit:

$$f(x) = \sum_0^{r-1} f_i(x) x^m \text{Log}^i x, m \in \mathbf{Z} \text{ et } f_i(x) \in \mathbf{C}\{x\}.$$

En déterminant les germes de  $(M-1)^j \langle f \rangle$ , il vient:

$$\dim F_{0,l} = r, \quad \dim E_{0,l} = r - 1 \quad \text{si } f_{r-1}(x) x^m \notin \mathbf{C}\{x\},$$

$$\dim F_{0,l} = r - 1 = \dim E_{0,l} \quad \text{si } f_{r-1}(x) x^m \in \mathbf{C}\{x\}.$$

LEMME 17. Pour  $\lambda = 0$  et  $v|_{F_{0,l}}$  surjective deux cas se présentent:

a)  $\dim F_{0,l} = \dim E_{0,l} + 1$ , alors  $f_{r-1}(x) x^m \notin \mathbf{C}\{x\}$ ,

$$\mathcal{D} \langle f \rangle = \mathcal{D} \left\langle \frac{1}{x} \text{Log}^{r-1} x \right\rangle, \quad \mathcal{D}/I_{0,l} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(xD)^{r-1}x,$$

b)  $\dim F_{0,l} = \dim E_{0,l}$ , alors  $f_{r-1}(x) x^m \in \mathbf{C}\{x\}$ ,

$$\mathcal{D} \langle f \rangle = \mathcal{D} \langle \text{Log}^{r-1} x \rangle, \quad \mathcal{D}/I_{0,l} \cong \mathcal{D}/\mathcal{D}(xD)^{r-1}.$$

Dans les deux cas:  $E(I_{0,l}) = E_{0,l}$  et  $F(I_{0,l}) = F_{0,l}$ .

Preuve. Les égalités  $\mathcal{D} \langle f \rangle = \mathcal{D} \left\langle \frac{1}{x} \text{Log}^{r-1} x \right\rangle$  dans le cas a) et  $\mathcal{D} \langle f \rangle = \mathcal{D} \langle \text{Log}^{r-1} x \rangle$  dans le cas b) se déduisent du lemme 16. La fin de la preuve est alors analogue à celle du lemme 15.

PROPOSITION 18. Soit  $I$  un idéal à singularité régulière,  $\oplus (E_{\lambda,l}; F_{\lambda,l})$  une décomposition de  $E(I) \xrightarrow[u]{v} F(I)$  en sous-espaces indécomposables maximaux. Posons:

$$I_{\lambda,l} = \{P \in \mathcal{D}; \forall f \in E_{\lambda,l} \text{ et } \forall \langle g \rangle \in F_{\lambda,l}, \\ Pf = 0 \text{ et } P \langle g \rangle = 0\}.$$

Alors:

$$I = \cap I_{\lambda,l} \text{ et } \mathcal{D}/I \cong \oplus \mathcal{D}/I_{\lambda,l}, \quad E(I_{\lambda,l}) = E_{\lambda,l}, \quad F(I_{\lambda,l}) = F_{\lambda,l}$$

De plus chacun des  $\mathcal{D}/I_{\lambda,l}$  est isomorphe à l'un des  $\mathcal{D}$ -modules

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(xD - \alpha)^r}, \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(Dx)^r}, \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(xD)^r}, \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(Dx)^r D}, \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(xD)^r x}.$$

*Preuve.* Des lemmes 15, 16, 17, on déduit :

$$E(I) = \bigoplus E(I_{\lambda, l}) \quad \text{et} \quad F(I) = \bigoplus F(I_{\lambda, l}),$$

du corollaire 8, la proposition découle facilement.

Un  $\mathcal{D}$ -module holonome (d'une variable) est un  $\mathcal{D}$ -module de type fini dont la variété caractéristique est de dimension 1 ([P] chap. 8); on dit qu'il est à singularité régulière lorsqu'il est engendré sur  $\mathcal{D}$  par un sous  $\mathcal{O}$ -module de type fini stable par  $xD$ .

**COROLLAIRE 19.** *Soit  $M$  un  $\mathcal{D}$ -module à singularité régulière holonome. Alors  $M$  est isomorphe à une somme directe finie de  $\mathcal{D}$ -module de la forme :*

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(xD - \alpha)^r}, \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(Dx)^r}, \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(xD)^r}, \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(Dx)^r D}, \quad \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(xD)^r x}.$$

C'est le résultat donné par L. Boutet de Monvel [BM].

*Preuve à partir de la proposition 17.*  $M$  étant un  $\mathcal{D}$ -module holonome,  $M$  est de longueur finie (voir [L], chap. III). Comme  $\mathcal{D}$  est un anneau simple, le théorème de J.T. Stafford (voir [Bj] chap. I) dit que  $M$  est cyclique; ou encore il existe un idéal  $I$  de  $\mathcal{D}$  tel que  $M \cong \mathcal{D}/I$ . On montre à partir de la définition des  $\mathcal{D}$ -modules à singularité régulière holonome (voir [P] chap. 11, p. 105) que les solutions analytiques et microfonctions de  $\mathcal{D}/I$  sont de classe de Nilsson. Or c'est la seule propriété de  $I$  que l'on a utilisée pour démontrer la proposition 18, d'où le corollaire 19. De plus il est facile de construire un opérateur à singularité régulière annulant  $E(I)$  et  $F(I)$ , donc appartenant à  $I$ . Il résulte de la définition (lemme 9) que  $I$  est à singularité régulière.

**COROLLAIRE 20.** *Soit  $I$  un idéal à singularité régulière, alors il existe  $J$  idéal à singularité régulière homogène tel que  $\mathcal{D}/I \cong \mathcal{D}/J$ .*

*Preuve.* C'est une conséquence de la proposition 18 et du corollaire 12.

## II.C. LES IDÉAUX PRINCIPAUX

L'objet de ce dernier paragraphe est la classification des  $\mathcal{D}$ -modules à singularité régulière de la forme  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ .

*Notation:* Etant donné des entiers  $(p, q, r, s)$  positifs ou nuls,  $\Lambda$  une partie finie de  $\mathbf{C-Z}$ , et des entiers :

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \mathbf{N}^p, & \beta &= (\beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbf{N}^q, \\ \gamma &= (\gamma_1, \dots, \gamma_r) \in (\mathbf{N}^*)^r, & \delta &= (\delta_1, \dots, \delta_s) \in (\mathbf{N}^*)^s, \\ \varepsilon &= (\varepsilon(\lambda))_{\lambda \in \Lambda} \in (\mathbf{N}^*)^\Lambda, \end{aligned}$$

on note  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  le  $\mathcal{D}$ -module :

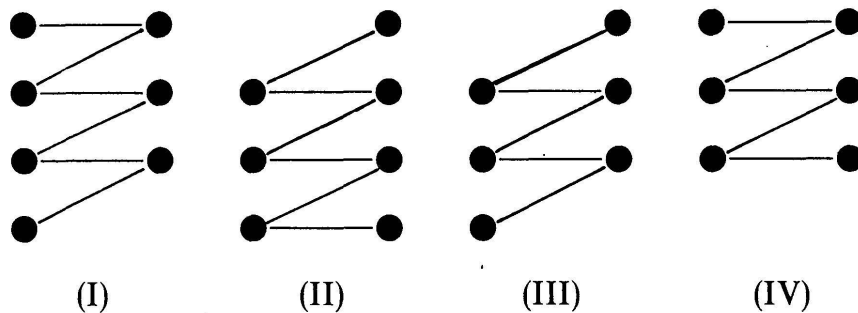
$$\begin{aligned} &\left( \bigoplus_{i=1}^p \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}D(xD)^{\alpha_i}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{j=1}^q \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x(Dx)^{\beta_j}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{k=1}^r \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(xD)^{\gamma_k}} \right) \\ &\oplus \left( \bigoplus_{l=1}^s \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(Dx)^{\delta_l}} \right) \oplus \left( \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}(xD - \lambda)^{\varepsilon(\lambda)}} \right) \end{aligned}$$

Il est convenu que si  $p, q, r$  ou  $s$  est nul, ou si  $\Lambda = \emptyset$  le facteur correspondant est nul. Les facteurs indécomposables qui apparaissent seront dits de type (I), (II), (III), (IV) ou (V) respectivement.

*Définition 21.* On dit que  $\mathcal{M}' \approx \mathcal{M}(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon)$  s'obtient à partir de  $\mathcal{M} \approx \mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  par adjonction d'une solution « micro-méro » dans l'un des trois cas suivants :

- a)  $\mathcal{M}' \approx \mathcal{M} \oplus (\mathcal{D}/\mathcal{D}x)$ ,
- b) un facteur  $\mathcal{D}/\mathcal{D}D(xD)^{\alpha_i}$  de  $\mathcal{M}$  est remplacé par un facteur  $\mathcal{D}/\mathcal{D}(Dx)^{\alpha_i+1}$  dans  $\mathcal{M}'$ ,
- c) un facteur  $\mathcal{D}/\mathcal{D}(xD)^{\gamma_k}$  de  $\mathcal{M}$  est remplacé par un facteur  $\mathcal{D}/\mathcal{D}x(Dx)^{\gamma_k}$  dans  $\mathcal{M}'$ .

Nous représentons les quatre premiers types de modules indécomposables par un éclair :

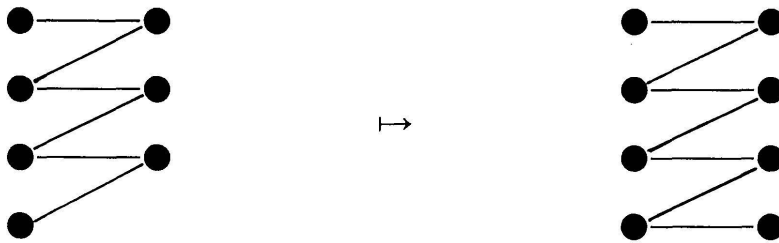


Les points de la colonne de gauche représentent une « base de Jordan de solutions analytiques », les points de la colonne de droite « une base de Jordan de solutions micro-fonctions »; les traits horizontaux de la gauche vers la droite représentent le morphisme  $u$ , et les traits descendants de la droite vers la gauche le morphisme de variation  $v$ .

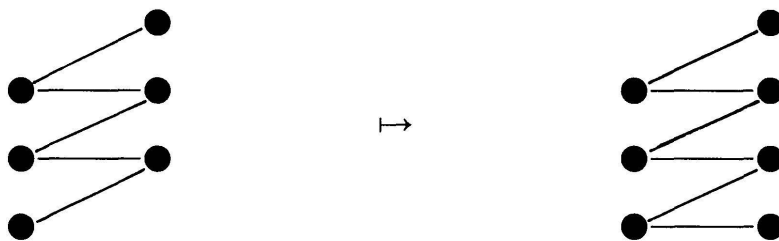
Avec cette figuration :



- l'opération (a) est l'adjonction de l'éclair élémentaire de type II,
- l'opération (b) consiste à remplacer un éclair de type (I) par un éclair de type (IV) en ajoutant le trait horizontal inférieur :



- l'opération (c) consiste à remplacer un éclair de type (III) par un éclair de type (II) en ajoutant le trait horizontal inférieur :



*Définition 22:* On dit que  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  d'indice  $p - q = 0$  vérifie la condition  $(M_0)$  si, quitte à réordonner les facteurs, pour  $1 \leq i \leq p$ ,  $\alpha_i > \beta_i$ . On dit que  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  d'indice  $\tau = p - q < 0$  vérifie la condition  $(M_\tau)$  s'il s'obtient à partir d'un  $\mathcal{D}$ -module vérifiant la condition  $(M_0)$  par adjonction successive de  $(-\tau)$  solutions « micro-méro ».

On dit que  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  d'indice  $\tau = p - q > 0$  vérifie la condition  $(M_\tau)$  si, par adjonction successive de  $\tau$  solutions « micro-méro », on peut obtenir un  $\mathcal{D}$ -module vérifiant la condition  $(M_0)$ . On peut aussi exprimer cette condition en disant que, quitte à réordonner les facteurs,  $\alpha_i > \beta_i$  pour  $1 \leq i \leq p$ .

**THÉORÈME 23.** *Etant donné le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  d'indice  $\tau = p - q$ , les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  vérifie la condition  $(M_\tau)$ ,
- (ii) il existe  $P \in \mathcal{D}$  à singularité régulière tel que  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P \approx \mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ .

Les lemmes 24 et 25 suivants ainsi que la proposition 26 vont nous permettre de démontrer (i)  $\Rightarrow$  (ii).

LEMME 24. Soit des entiers  $\alpha > \beta \geq 0$ ,  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ ; il existe  $P \in \mathcal{D}$  d'indice 0 et de degré  $d = \alpha + \beta + 1$  vérifiant

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}P} \approx \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}D(xD)^\alpha} \oplus \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x(Dx)^\beta}$$

et de polynôme initial  $\text{in}(P) = P_0 = (xD - a)^{\beta+1}(xD + b)^\alpha$ .

Preuve. Notons  $Q = (xD + b)^\alpha \cdot \frac{1}{1 - x^{a+b}} \cdot (xD - a)$ ; par intégration élémentaire on vérifie que les solutions analytiques de  $\mathcal{D}Q$  sont engendrées par une fonction :

$$\varphi = x^a(\text{Log } x)^\alpha + (c_1 x^a + d_1 x^{-b})(\text{Log } x)^{\alpha-1} + \dots + (c_\alpha x^a + d_\alpha x^{-b}).$$

D'autre part soit  $\Psi = x^{-b}(\text{Log } x)^\beta$ ; calculons  $Q \cdot \Psi$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 - x^{a+b}} (xD - a) \Psi \\ &= \left[ (-b - a)x^{-b}(\text{Log } x)^\beta + \beta x^{-b}(\text{Log } x)^{\beta-1} \right] \left( 1 + \frac{x^{a+b}}{1 - x^{a+b}} \right), \end{aligned}$$

$$Q \cdot \Psi = (xD + b)^\alpha \cdot \frac{x^a}{1 - x^{a+b}} [(-b - a)(\text{Log } x)^\beta + \beta(\text{Log } x)^{\beta-1}],$$

car  $\alpha$  est strictement supérieur à  $\beta$ , par hypothèse. Donc

$$Q \cdot \Psi = x^a h_0 (\text{Log } x)^\beta + x^a h_1 (\text{Log } x)^{\beta-1} + \dots + x^a h_\beta,$$

avec  $(h_0, \dots, h_\beta)$  analytiques au voisinage de 0,  $h_0$  inversible. On s'aperçoit alors que  $(xD - a) \frac{1}{h_0} Q \cdot \Psi$  est de la même forme que  $Q \cdot \Psi$ ,  $\beta$  étant remplacé par  $\beta - 1$ , et on peut donc construire un opérateur

$$R = (xD - a) \frac{1}{u_{\beta-1}} (xD - a) \frac{1}{u_{\beta-2}} \dots (xD - a) \frac{1}{u_0} \quad (u_0, \dots, u_{\beta-1} \text{ inversibles})$$

tel que  $RQ \cdot \Psi$  soit analytique au voisinage de 0, autrement dit  $RQ \langle \Psi \rangle = 0$ .

Il résulte de ces calculs que  $P = RQ$  admet les solutions engendrées par  $\varphi$  et  $\langle \Psi \rangle$  (sous l'action de  $u$  et  $v$ ) et donc, vu leur nombre, que

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}P} \approx \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}D(xD)^\alpha} \oplus \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x(Dx)^\beta}.$$

Enfin, par construction, on a le résultat annoncé sur la partie initiale:

$$\text{in}(P) = \text{in}(R) \cdot \text{in}(Q) = (xD - a)^\beta (xD + b)^\alpha (xD - a).$$

LEMME 25. Soit  $P$  et  $P'$  deux opérateurs à singularité régulière d'indice 0 et de degré  $d$  et  $d'$ , dont les parties initiales  $P_0$  et  $P'_0$  n'ont pas de racine commune. Il existe un opérateur  $Q$  d'indice 0 et de degré  $d + d'$  tel que  $\mathcal{D}P \cap \mathcal{D}P' = \mathcal{D}Q$ ,  $\mathcal{D}P + \mathcal{D}P' = \mathcal{D}$ , de partie initiale  $Q_0 = P_0 P'_0$ .

Preuve. On note  $\mathbf{C}[xD]^{(d)}$  l'espace vectoriel des polynômes de degré strictement inférieur à  $d$ , et

$$\Phi: \mathbf{C}[xD]^{(d')} \times \mathbf{C}[xD]^{(d)} \rightarrow \mathbf{C}[xD]^{(d+d')}$$

l'application définie par  $\Phi(U, U') = UP_0 - U'P'_0$ ;  $P_0$  et  $P'_0$  étant premiers entre eux,  $\Phi$  est un isomorphisme.

En multipliant à gauche  $P$  et  $P'$  par des unités, nous pouvons supposer:

$$P = P_0 + \sum_{k \geq 1} x^k P_k, \quad P' = P'_0 + \sum_{k \geq 1} x^k P'_k$$

avec, pour  $k \geq 1$ ,  $P_k \in \mathbf{C}[xD]^{(d)}$ ,  $P'_k \in \mathbf{C}[xD]^{(d')}$ .

Résolvons formellement l'équation  $AP = A'P'$  en posant:

$$A = A_0 + \sum_{k \geq 1} x^k A_k, \quad A' = A'_0 + \sum_{k \geq 1} x^k A'_k,$$

$A_0 = P'_0$ ,  $A'_0 = P_0$  et pour  $k \geq 1$ ,  $A_k \in \mathbf{C}[xD]^{(d)}$ ,  $A'_k \in \mathbf{C}[xD]^{(d')}$ . Le couple  $(A_k, A'_k)$  est déterminé par récurrence de manière unique par la formule ( $k \geq 1$ ):

$$\Phi(A_k, A'_k) = \sum_{l=0}^{k-1} (-A_l^{[k-l]} P_{k-l} + A'_l^{[k-l]} P'_{k-l}).$$

La notation est celle introduite précédemment: pour  $B \in \mathbf{C}[xD]$ ,  $B^{[n]}$  est défini par  $B^{[n]}(xD) = B(xD + n)$ .

Choisissons comme norme d'un polynôme de  $\mathbf{C}[xD]$  la somme des modules des coefficients; on a les majorations élémentaires suivantes:

— pour  $B \in \mathbf{C}[xD]^{(d)}$  ou  $\mathbf{C}[xD]^{(d')}$ ,  $\|B^{[n]}\| \leq \|B\| (1+n)^\delta$ ,  
avec  $\delta = \sup(d, d')$ ;

— en prenant  $\|(A_k, A'_k)\| = \sup(\|A_k\|, \|A'_k\|)$ ,

$$\|(A_k, A'_k)\| \leq \|\Phi^{-1}\| \sum_{l=0}^{k-1} 2 \|(A_l, A'_l)\| \|(P_{k-l}, P'_{k-l})\| (1+k-l)^\delta.$$

Nous pouvons alors montrer la convergence des séries  $A$  et  $A'$  grâce à une série majorante: nous savons qu'il existe  $\rho > 0$  et  $K > 0$  tel que, pour tout entier  $k$ ,  $\|(P_k, P'_k)\| \leq K\rho^k$ ; ce qui donne

$$\|(A_k, A'_k)\| \leq 2 \|\Phi^{-1}\| K \sum_{l=0}^{k-1} \|(A_l, A'_l)\| \rho^{k-l}(1+(k-l))^\delta.$$

Soit  $U = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k x^k$  la série numérique à coefficients positifs définie par  $u_0 = \|(A_0, A'_0)\|$  et, pour  $k \geq 1$ :

$$u_k = 2 \|\Phi^{-1}\| K \sum_{l=0}^{k-1} u_l \rho^{k-l}(1+k-l)^\delta.$$

Cette série est convergente puisque c'est la solution de l'équation

$$U = u_0 + 2 \|\Phi^{-1}\| K \left( \sum_{k \geq 1} \rho^k (1+k)^\delta x^k \right) U$$

et, par récurrence, pour tout entier  $k$ ,  $\|(A_k, A'_k)\| \leq u_k$ ; les séries  $A$  et  $A'$  sont donc convergentes.

Nous pouvons donc prendre  $Q = AP = A'P'$  d'indice 0 et de degré  $d + d'$ , qui vérifie  $\mathcal{D}Q \subset \mathcal{D}P \cap \mathcal{D}P'$  et  $Q_0 = P_0 \cdot P'_0$ .

En ce qui concerne l'affirmation  $\mathcal{D}P + \mathcal{D}P' = \mathcal{D}$ , on peut résoudre de manière analogue à la précédente l'équation  $AP - A'P' = 1$ . Une autre méthode consiste à remarquer que si  $x^\alpha u(x)$  (ou  $\langle x^\alpha u(x) \rangle$  pour  $\alpha \notin \mathbf{N}$ ) est solution de  $\mathcal{D}P$  avec  $u(x)$  inversible, nécessairement  $\alpha$  est racine de  $P_0$ ; par hypothèse sur  $P_0$  et  $P'_0$ ,  $\mathcal{D}P$  et  $\mathcal{D}P'$  n'ont donc pas de solution commune, et par le corollaire 7,  $\mathcal{D}P + \mathcal{D}P' = \mathcal{D}$ . En comptant alors le nombre de solutions on a  $\mathcal{D}Q = \mathcal{D}P \cap \mathcal{D}P'$ .

**PROPOSITION 26.** *Soit donné le  $\mathcal{D}$ -module  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  d'indice  $p - q = 0$ , vérifiant la condition  $(M_0)$ , et*

— pour  $1 \leq i \leq p$  et  $1 \leq k \leq r$  des entiers positifs ou nuls  $(a_i)$  et  $(c_k)$  tous distincts;

— pour  $1 \leq j \leq p$  et  $1 \leq l \leq s$  des entiers  $(b_j)$  et  $(d_l)$  strictement positifs distincts.

Il existe  $P \in \mathcal{D}$  à singularité régulière d'indice 0 tel que  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \approx \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}P}$  et  $P$  a pour partie initiale:

$$P_0 = \left[ \prod_{1 \leq i \leq p} (xD - a_i)^{\beta_i + 1} (xD + b_i)^{\alpha_i} \right] \left[ \prod_{k=1}^r (xD - c_k)^{\gamma_k} \right] \\ \left[ \prod_{l=1}^s (xD + d_l)^{\delta_l} \right] \left[ \prod_{\lambda \in \Lambda} (xD - \lambda)^{\varepsilon(\lambda)} \right].$$

*Preuve.* On peut supposer  $\alpha_i > \beta_i$  pour  $1 \leq i \leq p$  et le lemme 24 fournit  $P_i \in \mathcal{D}$  tel que

$$\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}P_i} \approx \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}D(xD)^{\alpha_i}} \oplus \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{D}x(Dx)^{\beta_i}} \quad \text{et} \quad \text{in}(P_i) = (xD - a_i)^{\beta_i + 1} (xD + b_i)^{\alpha_i}.$$

Pour  $1 \leq k \leq r$  on prend  $R_k = (xD - c_k)^{\gamma_k}$ , pour  $1 \leq l \leq s$   $S_l = (xD + d_l)^{\delta_l}$ , et pour  $\lambda \in \Lambda$   $T_\lambda = (xD - \lambda)^{\varepsilon(\lambda)}$ .

On applique le lemme 25 un nombre convenable de fois à partir des polynômes  $(P_i)_{1 \leq i \leq p}$ ,  $(R_k)_{1 \leq k \leq r}$ ,  $(S_l)_{1 \leq l \leq s}$  et  $(T_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ; on obtient ainsi  $P$  satisfaisant à la demande.

*Preuve de (i)  $\Rightarrow$  (ii).* Soit  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon)$  d'indice  $\tau = p' - q' < 0$  satisfaisant à la condition  $(M_\tau)$ , donc provenant de  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  satisfaisant à la condition  $(M_0)$  par adjonction de  $-\tau$  solutions « micro-méro ».

On a  $s' - s = p - p' \geq 0$ ,  $r - r' \geq 0$ ,  $q' - q = (r - r') + h$ ,  $h \geq 0$  et  $-\tau = (p - p') + (r - r') + h$  où  $h$  désigne le nombre d'opérations de type (a) effectuées,  $p - p'$  le nombre d'opérations de type (b),  $r - r'$  le nombre d'opérations de type (c). Quitte à réordonner les indices, on peut supposer que les éclairs de  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  touchés par une opération de type (b) sont numérotés de  $i = 1$  à  $i = p - p'$ , ceux touchés par une opération de type (c) numérotés de  $k = 1$  à  $k = r - r'$ .

Appliquons la proposition 26 à  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  en prenant  $a_i = i - 1$  pour  $1 \leq i \leq p - p'$ ,  $c_k = p - p' + k - 1$  pour  $1 \leq k \leq r - r'$ , tous les autres entiers étant choisis distincts en dehors de  $\{0, 1, 2, \dots, -\tau\}$ ; on obtient  $P$  d'indice 0 tel que  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P \approx \mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  et il reste à vérifier que  $P' = Px^{-\tau}$  satisfait à  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P' \approx \mathcal{M}(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon)$ : en effet les solutions de  $\mathcal{D}P'$  s'obtiennent en divisant les solutions de  $\mathcal{D}P$  par  $x^{-\tau}$  et en ajoutant les  $h$  solutions micro-fonctions  $\langle \frac{1}{x} \rangle$ ,  $\langle \frac{1}{x^2} \rangle$ , ...,  $\langle \frac{1}{x^h} \rangle$ .

On traite le cas de  $\mathcal{M}' = \mathcal{M}(\alpha', \beta', \gamma', \delta', \varepsilon)$  d'indice  $\tau = p' - q' > 0$  de manière analogue: si  $\mathcal{M}'$  satisfait  $(M_\tau)$ , en ajoutant  $\tau$  solutions « micro-méro » on obtient  $\mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$  vérifiant  $(M_0)$ ; toujours d'après la proposition 26, il existe  $P$  tel que  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P \approx \mathcal{M}(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$ , les solutions « micro-méro » sup-

plémentaires étant  $\langle \frac{1}{x} \rangle$ ,  $\langle \frac{1}{x^2} \rangle$ , ...,  $\langle \frac{1}{x^\tau} \rangle$ ; l'anneur de ces solutions étant  $\mathcal{D}x^\tau$ , on a  $P = P'x^\tau$  et  $P'$  vérifie  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P' \approx \mathcal{M}'$ .

Nous passons maintenant à la démonstration de (ii)  $\Rightarrow$  (i), et faisons pour cela des réductions successives.

*Réduction au cas d'indice 0.* Soit  $P$  un opérateur à singularité régulière d'indice  $p - q = \tau > 0$ ; les solutions de l'opérateur  $P' = Px^\tau$  s'obtiennent en divisant les solutions de l'opérateur  $P$  par  $x^\tau$  et en ajoutant les solutions micro-fonctions  $\langle \frac{1}{x} \rangle$ , ...,  $\langle \frac{1}{x^\tau} \rangle$ ; précisons des générateurs des blocs indécomposables maximaux des solutions de  $\mathcal{D}P$  du type (I) et (III):

$$\begin{cases} \varphi_i = \varphi_i^0 (\log x)^{\alpha_i} + \varphi_i^1 (\log x)^{\alpha_i - 1} + \dots + \varphi_i^{\alpha_i}, & 1 \leq i \leq p, \\ \langle \Psi_k \rangle = \langle \Psi_k^0 (\log x)^{\gamma_k} + \Psi_k^1 (\log x)^{\gamma_k - 1} + \dots + \Psi_k^{\gamma_k} \rangle, & 1 \leq k \leq r, \end{cases}$$

et notons  $(a_i)$  et  $(c_k)$  les ordres des fonctions analytiques (indépendantes)  $(\varphi_i^0)$  et  $(\Psi_k^0)$ .

Si par exemple  $\alpha_1 = \max(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \gamma_1, \dots, \gamma_r)$ , quitte à enlever à  $(\varphi_i)_{2 \leq i \leq p}$  et  $(\langle \Psi_k \rangle)_{1 \leq k \leq r}$  un multiple d'une solution engendrée par  $\varphi_1$  (sous l'action de  $u$  et  $v$ ), on peut supposer que  $(\varphi_i^0)_{2 \leq i \leq p}$  et  $(\langle \Psi_k^0 \rangle)_{1 \leq k \leq r}$  ne contiennent plus  $x^{a_1}$  dans leur développement; on opère de manière analogue lorsque  $\gamma_1 = \sup(\gamma_2, \dots, \gamma_r) > \sup(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$  à partir de  $\langle \Psi_1 \rangle$ . Au bout du compte on s'arrange pour obtenir les ordres  $(a_i)$  et  $(c_k)$  tous distincts. Pour  $0 \leq a_i \leq \tau - 1$  (resp.  $0 \leq c_k \leq \tau - 1$ ) le bloc engendré par  $\varphi_i$  (resp.  $\langle \Psi_k \rangle$ ) est remplacé dans les solutions de  $P'$  par un facteur de type III (resp. II) engendré par  $\frac{\varphi_i}{x^\tau}$  (resp.  $\langle \frac{\Psi_k}{x^\tau} \rangle$ ). Il reste à adjoindre les solutions micro-fonctions  $\langle \frac{1}{x^s} \rangle$  pour  $1 \leq s \leq \tau$ ,  $s$  distinct des  $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$  et des  $(c_k)_{1 \leq k \leq r}$ . Ainsi, si  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P'$  satisfait  $(M_0)$ ,  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$  satisfait  $(M_\tau)$ .

Traisons maintenant le cas de  $P$  d'indice  $\tau = p - q < 0$ :  $P = P'x^{-\tau}$  où  $P'$  est d'indice 0; la démonstration précédente montre que le diagramme de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$  s'obtient à partir de celui de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P'$  par adjonction de  $(-\tau)$  solutions « micro-méro » et donc, si  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P'$  vérifie  $(M_0)$ ,  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$  vérifie  $(M_\tau)$  par définition.

*Réduction au cas  $s = 0$ ,  $\Lambda = \emptyset$ .* Soit  $\varphi$  une fonction de classe de Nilsson de la forme:

$$\varphi = x^\lambda [u_0 (\log x)^\varepsilon + v_1 (\log x)^{\varepsilon - 1} + \dots + v_\varepsilon]$$

$u_0, v_1, \dots, v_\varepsilon$  uniformes,  $u_0$  inversible.

Nous allons préciser l'opérateur  $S_\varphi$  d'indice 0 et de degré minimum annulant  $\varphi$ ; soit  $\tilde{\varphi} = (xD - \lambda) \frac{1}{u_0} \varphi$ ; un calcul évident donne:

$$\tilde{\varphi} = x^\lambda [\tilde{u}_0 (\log x)^{\varepsilon-1} + \tilde{v}_1 (\log x)^{\varepsilon-2} + \dots + \tilde{v}_{\varepsilon-1}], \text{ avec } \tilde{u}_0 = \varepsilon + x \left( \frac{v_1}{u_0} \right)'.$$

Lorsque  $v_1$  est holomorphe  $\tilde{u}_0$  est inversible; lorsque  $v_1$  a un pôle d'ordre  $\eta_1$ ,  $\tilde{u}_0$  a également un pôle d'ordre  $\eta_1$  et  $\tilde{\varphi}$  s'écrit:

$$\tilde{\varphi} = x^{\lambda - \eta_1} [u_1 (\log x)^{\varepsilon-1} + \omega_1 (\log x)^{\varepsilon-2} + \dots + \omega_{\varepsilon-1}],$$

$u_1, \omega_1, \dots, \omega_{\varepsilon-1}$  uniformes;  $u_1$  inversible.

On obtient, au bout de  $\varepsilon + 1$  pas:

$$(*) \quad S_\varphi = (xD - \lambda + \eta_\varepsilon) \frac{1}{u_\varepsilon} \dots (xD - \lambda + \eta_1) \frac{1}{u_1} (xD - \lambda) \frac{1}{u_0},$$

$$0 \leq \eta_1 \leq \eta_2 \dots \leq \eta_\varepsilon.$$

Lorsque  $\varphi$  engendre un bloc de type (IV) ou (V),  $\mathcal{D}S_\varphi$  est exactement l'annulateur de ce bloc puisque le nombre de solutions analytiques et micro-fonctions de  $\mathcal{D}S_\varphi$  est  $\varepsilon + 1$ .

Revenons alors à  $P$  d'indice 0 et  $\varphi$  générateur d'un bloc de type (IV) ou (V) de solutions de  $\mathcal{D}P$ ;  $P$  s'écrit  $P = QS_\varphi$  avec  $Q$  d'indice 0 et de degré  $d(P) - d(S_\varphi)$  et on a:

$$E(\mathcal{D}P) \oplus F(\mathcal{D}P) = [E(S_\varphi) \oplus F(S_\varphi)] \oplus [E' \oplus F']$$

$E' \oplus F'$  étant la somme directe des autres blocs de solutions de  $\mathcal{D}P$ ; en appelant  $J$  l'annulateur de  $E' \oplus F'$ ,  $\mathcal{D}P = \mathcal{D}S_\varphi \cap J$  et  $\mathcal{D}S_\varphi + J = \mathcal{D}$ ; d'après le corollaire 8,  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P = \mathcal{D}/\mathcal{D}S_\varphi \oplus \mathcal{D}/J$ .

Remarquons que le morphisme de multiplication à droite par  $S_\varphi$  de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}Q$  dans  $\mathcal{D}/J$  est bien défini et surjectif; il est injectif car  $\mathcal{D}Q$  et  $J$  ont même nombre de solutions analytiques et de solutions micro-fonctions, donc même multiplicité; en conséquence  $\mathcal{D}/J \approx \mathcal{D}/\mathcal{D}Q$  et  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$  vérifie  $(M_0)$  si et seulement si  $\mathcal{D}/\mathcal{D}Q$  vérifie  $(M_0)$ .

On enlève ainsi tous les blocs de type (IV) et (V) et on est ramené au cas voulu  $s = 0$  et  $\Lambda = \emptyset$ .

*Fin de la preuve de (ii)  $\Rightarrow$  (i).* Soit donc  $P$  d'indice 0 dont la décomposition ne comporte que des blocs de type (I), (II) et (III). Précisons des générateurs de type (II):

$$\langle \Psi_j \rangle = \langle \Psi_j^0 (\log x)^{\beta_j} + \Psi_j^1 (\log x)^{\beta_j-1} + \dots + \Psi_j^{\beta_j} \rangle, \quad 1 \leq j \leq p;$$

et notons  $b_j$  les ordres des fonctions méromorphes indépendantes  $\Psi_j^0$ . Lorsque  $\beta_1 = \max(\beta_1, \dots, \beta_p)$ , par exemple, nous pouvons enlever à  $(\langle \Psi_j \rangle)_{2 \leq j \leq p}$  un multiple d'une solution engendrée par  $\langle \Psi_1 \rangle$  de manière que  $\Psi_j^0$  ne comporte plus de terme en  $\frac{1}{x^{b_1}}$  dans son développement. Ainsi, on peut arriver à un système de générateurs  $\langle \Psi_j \rangle$  pour lesquels les ordres  $b_j$  correspondants soient tous distincts — ce que nous supposons par la suite.

Soit  $\varphi_1 = \varphi_1^0 (\log x)^{\alpha_1} + \varphi_1^1 (\log x)^{\alpha_1 - 1} + \dots + \varphi_1^{\alpha_1}$  un générateur d'un bloc indécomposable maximal de solutions de  $\mathcal{D}P$  de type (I); lorsqu'on fait la division de  $P$  par  $S_{\varphi_1}$  de degré  $\alpha_1 + 1$  (\*) on trouve un reste nul puisque les  $(\alpha_1 + 1)$ -solutions analytiques de  $S_{\varphi_1}$  sont solutions de  $P: P = QS_{\varphi_1}$ . Les solutions de  $S_{\varphi_1}$  se composent du bloc engendré par  $\varphi_1$  et d'une solution microfonction supplémentaire définie par une fonction méromorphe  $h$  d'ordre  $\mu$ : par construction de  $S_{\varphi_1}$  (voir (\*)),  $\mu$  est l'ordre de la première fonction méromorphe  $\varphi_1^t$  ( $t = 1, \dots, \alpha_1$ ) apparaissant dans le développement de  $\varphi_1$  (si toutes les fonctions  $\varphi_1^t$  étaient holomorphes au voisinage de 0 les solutions de  $S_{\varphi_1}$  forment un bloc de type III).

Appelons encore  $J'$  l'ensemble des indices  $j \in \{1, 2, \dots, p\}$  pour lesquels  $\beta_j \geq \alpha_1$  et  $J''$  les autres; on peut modifier  $\varphi_1$  en enlevant un multiple d'une solution engendrée par  $(\langle \Psi_j \rangle)_{j \in J'}$  (en suivant l'ordre des  $(b_j)_{j \in J'}$  décroissants) et supposer  $\mu$  égal à l'un des  $(b_j)_{j \in J''}$ . Alors  $\langle h \rangle = c_1 \Psi_1^0 + c_2 \Psi_2^0 + \dots + c_p \Psi_p^0$  et l'un des scalaires  $c_j$  pour  $j \in J''$  est non nul.

Choisissons  $j_0 \in J''$  vérifiant  $\beta_{j_0} = \inf\{\beta_j/c_j \neq 0\}$ ; toujours en enlevant à  $\langle \Psi_{j_0} \rangle$  une combinaison linéaire des fonctions  $(u_0 v)^{\beta_j - \beta_{j_0}} \langle \Psi_j \rangle$  pour  $j$  vérifiant  $c_j \neq 0$  et  $j \neq j_0$ , on se ramène à  $\langle h \rangle = c_{j_0} \langle \Psi_{j_0}^0 \rangle$ .

Nommons  $E' \oplus F'$  la somme directe formée de tous les blocs de solutions de  $\mathcal{D}P$  à l'exception des blocs engendrés par  $\varphi_1$  et  $\langle \Psi_{j_0} \rangle$ , et du sous espace vectoriel de solutions engendré par  $v \circ (u \circ v)^v \langle \Psi_{j_0} \rangle$  et  $(u \circ v)^v \langle \Psi_{j_0} \rangle$  pour  $0 \leq v \leq \beta_{j_0} - 1$ ;  $\mathcal{D}S_{\varphi_1}$  n'a dans  $E' \oplus F'$  que la solution triviale 0, et par conséquent  $S_{\varphi_1}$  opère injectivement sur  $E' \oplus F'$ ;  $S_{\varphi_1}(E') \oplus S_{\varphi_1}(F')$  sont des solutions de  $Q$  (car  $P = QS_{\varphi_1}$ ) en nombre exactement égal aux nombres de solutions de  $Q$ :  $E(\mathcal{D}Q) = S_{\varphi_1}(E')$  et  $F(\mathcal{D}Q) = S_{\varphi_1}(F')$ . Enfin, comme  $u$  et  $v$  commutent à l'opérateur  $S_{\varphi_1}$ , le diagramme d'éclairs de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}Q$  se déduit de celui de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$  en supprimant l'éclair de type (I) engendré par  $\varphi_1$ , l'éclair de type (II) engendré par  $\langle \Psi_{j_0} \rangle$ , et en ajoutant un éclair de type (III) (de longueur  $\beta_{j_0}$ ). Puisque  $j_0 \in J''$ ,  $\alpha_1 > \beta_{j_0}$ , et par induction, si  $\mathcal{D}/\mathcal{D}Q$  vérifie  $(M_0)$  il en est de même de  $\mathcal{D}/\mathcal{D}P$ .



## BIBLIOGRAPHIE

- [BJ] BJÖRK, J. E. *Rings of differential operators*. North-Holland, Mathematical Library (1979).
- [BM] BOUTET DE MONVEL, L. *Séminaire E.N.S.* (1979-80), Appendice II, à l'exposé n° 3.
- [Br] BRIANÇON, J. Description de  $\text{Hilb}^n \mathbb{C}\{x, y\}$ . *Inventiones mathematicae* 41 (1977), 45-89.
- [L] LEJEUNE, M. Opérateurs différentiels et pseudo-différentiels. *Séminaire de Grenoble*, exposé n° 3 (1975-76).
- [M1] MALGRANGE, B. Remarques sur les points singuliers des équations différentielles. *C.R. Acad. Sci. Paris* 273 (8 déc. 1971), 1136-1137.
- [M2] ——— (Article à paraître.)
- [M3] ——— Sur les points singuliers des équations différentielles. *L'Enseignement Math.* 20 (1974), 146-176.
- [P] PHAM, F. *Singularités des systèmes différentiels de Gauss-Manin*. Progress in Math. 2, Birkhäuser (1979).
- [S] STRÖMBECK, P. On left ideals in  $A_1$  and their associated graded ideals, *Journal of Algebra* 55 (1978), 116-144.
- [W] WASOW, W. *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. Interscience, Publ. (1965).

(Reçu le 6 septembre 1982)

Joël Briançon  
Philippe Maisonobe

Département de Mathématiques  
Faculté des Sciences, IMSP  
Parc Valrose  
F-06034 Nice Cedex  
(France)