Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1984)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: TRANSFORMÉES DE LAPLACE DES MICROSOLUTIONS DE SYSTÈMES HOLONOMES

Kapitel: 0. La condition « non caractéristique »

Autor: Pham, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53821

termes de son développement asymptotique formel en τ soit singulier! Il s'agit là d'un phénomène bien connu des physiciens (la fonction d'onde est régulière, bien que ses développements BKW *) soient singuliers), dont la relation avec le « phénomène de Stokes » de la théorie des équations différentielles à singularités irrégulières avait été remarquée depuis longtemps dans le cas $n = 1$, mais qui ne m'est devenu clair qu'après lecture de l'article de Voros [18]. En fait, la seule prétention du présent article est de généraliser en dimension n quelconque l'étude de la structure des points tournants donnée par Voros (dans le cas particulier des points tournants de type « Airy ») au §6 de son article [18]. Il se trouve que tout le travail technique était déjà fait dans un article fondamental de Kashiwara-Kawai[6], et ma seule contribution (peut-être) originale a été d'utiliser la transformation de Laplace comme un dictionnaire pour traduire leurs résultats; pour tout ce qui concerne Laplace (absent des préoccupations de [6]) je me suis inspiré d'idées non publiées de Malgrange (cf. cependant [12]), elles-mêmes influencées par les travaux de Voros; pour l'exposé des résultats de Kashiwara-Kawai (difficiles à lire dans l'article original, en raison du gros outillage cohomologique utilisé), j'ai été très aidé par un exposé de J. E. Björk au séminaire Goulaouic-Schwartz [3]. Le présent exposé doit donc beaucoup à B. Malgrange qui depuis plusieurs années m'explique ses idées sur Laplace, ainsi qu'à J. E. Björk qui m'a aidé à comprendre l'article de Kashiwara-Kawai. Il aurait pu être beaucoup plus bref si je n'avais voulu le rendre lisible sans connaissance préalable du calcul microdifférentiel.

Dans un article ultérieur (dont [16] est une première esquisse) j'aborderai plus spécifiquement les problèmes de physique concernés par la méthode semi-classique complexe (états liés dans le cas où le système classique est complètement intégrable; états de diffusion...).

0. La condition « non caractéristique »

On se place désormais dans un voisinage de l'origine dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ muni des coordonnées $(x_1, \ldots, x_n, t) = (x, t)$. $\mathcal{O} = \mathbf{C}\{x, t\}$ désigne l'anneau des

*) « BKW » = Brillouin Kramers Wentzel. Les développements BKW sont des développements en puissances de $\frac{1}{\hbar}$ (= notre paramètre τ) des fonctions d'onde de la mécanique ondulatoire. Ces développements sont divergents, de plus leurs termes pris individuellement sont singuliers (avec ramification) aux points dits « points tournants » *(turning points)* où est singulière la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi. L'article de Voros mentionné ici exploite joliment l'idée de Balian et Bloch [1] de chercher à resommer les développements BKW sous forme intégrale de Laplace.

germes de fonctions holomorphes, et $\mathscr{D} = \mathscr{O} <\partial_x, \partial_t>$ désigne l'anneau (noethérien) des germes d'opérateurs différentiels à coefficients holomorphes.

Soit $\mathscr{S} \subset \mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ un germe d'hypersurface analytique complexe, et soit ψ une fonction analytique multiforme dans $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C} \backslash \mathscr{S}$, *de classe de Nilsson le long de* $\mathscr{S}$, c'est-à-dire de type de détermination fini et à croissance modérée au voisinage de $\mathscr{S}$. On sait (cf. par exemple [2], chap. IV) que ψ est alors solution d'un germe de *système holonome d'équations aux dérivées partielles linéaires*, c'est-à-dire qu'il existe dans $\mathscr{D}$ un idéal à gauche $\mathscr{I}$ tel que $P\psi = 0$ pour tout $P \in \mathscr{I}$, et tel que les symboles principaux des éléments de $\mathscr{I}$ définissent dans le fibré $T^*(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C})$ un sous-ensemble analytique (conique) *holonome* (= lagrangien, c'est-à-dire involutif et de codimension $n+1$), la « *variété caractéristique du système* », notée $V(\mathscr{D}/\mathscr{I})$. De plus ce système holonome est « à singularité régulière » (mais ce fait ne sera guère utilisé dans la suite).

Comme nous nous intéresserons avant tout aux *singularités* de ψ, nous serons en réalité amenés à étudier des germes de systèmes holonomes dont ψ est *solution modulo* $\mathscr{O}$, c'est-à-dire que $P\psi \in \mathscr{O}$ pour tout $P \in \mathscr{I}$. Le quotient par $\mathscr{O}$ de l'espace des solutions modulo $\mathscr{O}$ constitue ce que nous appellerons l'espace des « *microsolutions* ».

Exemples

i) $\psi = t^\alpha (\alpha \in \mathbf{C})$ est solution de $(t\partial_t - \alpha)\psi = 0\,, \quad \partial_{x_1}\psi = \dots = \partial_{x_n}\psi = 0\,.$

$$V(\mathscr{D}/\mathscr{I}) = \{(x, t; \xi, \tau) \mid t\tau = 0, \xi_1 = \dots = \xi_n = 0\}\,,$$

union de la section nulle du fibré cotangent, et du fibré conormal à l'hyperplan $t = 0$;

$\psi = t^p \operatorname{Log} t \quad (p \in \mathbf{N})$ est *solution* mod. $\mathscr{O}$ de $(t\partial_t - p)\psi \equiv 0 \quad$ mod. $\mathscr{O}$, $\partial_{x_1}\psi = \dots = \partial_{x_n}\psi = 0$ (même variété caractéristique que ci-dessus).

ii) $(n=1)\ \psi = \dfrac{1}{t^2 - x^3}$ est solution mod. $\mathscr{O}$ de

$$\begin{cases} (t^2 - x^3)\psi \equiv 0 \quad (\text{mod. } \mathscr{O}) \\ (3x^2\partial_t + 2t\partial_x)\psi = 0 \end{cases}$$

dont la variété caractéristique est donnée par les équations

$$\begin{cases} t^2 - x^3 = 0 \\ 3x^2\tau + 2t\xi = 0\,, \end{cases}$$

et a donc deux composantes:

la première, $T^*_{\mathscr{S}}(\mathbf{C}\times\mathbf{C})$, est le fibré conormal à la courbe $\mathscr{S}$ d'équation $t^2 - x^3 = 0 \left(t^2 - x^3 = 0, \tau \neq 0, \frac{\xi}{\tau} = -\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{\tau}\right)$;

la seconde, $T^*_0(\mathbf{C}\times\mathbf{C})$, est le fibré conormal à l'origine: ($x = t = 0$, ξ, τ quelconques).

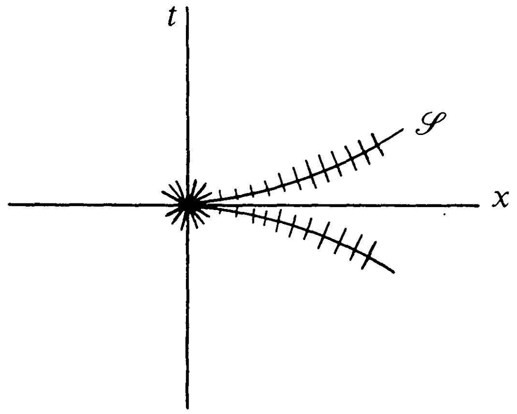

FIGURE 2
Les deux composantes de la variété caractéristique de l'exemple ii).

iii) ($n = 1$) Considérons le système

$$\begin{cases} \left(t\partial_t + \frac{2}{3}x\,\partial_x + \frac{2}{3}\right)\psi = 0 \\ \left(\partial_x^2 - \frac{9}{4}x\,\partial_t^2\right)\psi = 0\,. \end{cases}$$

Sa variété caractéristique, donnée par les équations

$$(3t\tau + 2x\xi = 0\,,\ 4\xi^2 - 9x\tau^2 = 0)\,,$$

se compose de la section nulle et de la composante $T^*_{\mathscr{S}}(\mathbf{C}\times\mathbf{C})$ de l'exemple ii).

Ce système admet 2 solutions linéairement indépendantes, que l'on peut écrire

$$\psi_\pm(x,t) = \frac{1}{x}F\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}; \frac{1}{2} \pm \frac{t}{2x^{3/2}}\right)$$

où F est la fonction hypergéométrique. Bien que cela ne transparaisse pas immédiatement dans l'écriture ci-dessus, ces fonctions ne sont pas singulières sur la droite $x = 0$.

Définition. On dit que le système $\mathscr{D}/\mathscr{I}$ est *non caractéristique pour le feuilletage vertical* de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ si sa variété caractéristique ne contient aucun covecteur horizontal non nul.

Ici « horizontal » [resp. « vertical »] signifie parallèle à la 1re [resp. 2^{e}] composante de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$; le feuilletage vertical est donc celui dont les feuilles sont les droites $x = \text{Cte}$, et un covecteur (ξ, τ) est horizontal si $\tau = 0$.

Exemples. La condition « non caractéristique » est vérifiée par les exemples i) et iii) ci-dessus, mais pas par l'exemple ii).

REMARQUE. Comme les fibres de la variété caractéristique sont des cônes, le fait d'interdire les codirections horizontales entraîne que chacun de ces cônes ne peut consister qu'en un *nombre fini de codirections* (car une variété projective complexe ne peut éviter un hyperplan que si elle est de dimension 0).

Dans le cas — qui nous occupe — où la variété caractéristique est *holonome* (= lagrangienne) on en déduit que la condition non caractéristique équivaut à la condition apparemment plus forte que voici:

Condition non caractéristique pour les systèmes holonomes

1° Le lieu singulier $\mathscr{S}$ de $\mathscr{D}/\mathscr{I}$ (ensemble des points où il existe un covecteur caractéristique non nul) est *fini* (localement) *en restriction à chaque feuille*;

2° Le feuilletage est transverse à $\mathscr{S}$, c'est-à-dire qu'il est transverse à toutes les directions limites d'hyperplans tangents à la partie lisse de $\mathscr{S}$;

3° L'ensemble $V^*(\mathscr{D}/\mathscr{I})$ des covecteurs caractéristiques non nuls correspond à l'ensemble des directions limites ci-dessus, autrement dit

$$\overline{V^*(\mathscr{D}/\mathscr{I})} = T^*_{\mathscr{S}}(\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}).$$

Cette définition étant posée, nous trouvons dans Kashiwara-Kawai [6], chap. IV, une réponse à la question suivante:

« étant donné un germe de système holonome $\mathscr{M} = \mathscr{D}/\mathscr{I}$, non caractéristique pour le feuilletage en droites verticales, que peut-on dire de l'espace des « *microsolutions* » de ce système, c'est-à-dire de l'espace quotient par $\mathscr{O}$ de l'espace des solutions mod. $\mathscr{O}$? »

En fait Kashiwara et Kawai placent d'emblée le problème dans le cadre « microdifférentiel », c'est-à-dire que l'anneau $\mathscr{D}$, difficile à manier, est remplacé par un anneau plus grand dans lequel l'opérateur ∂_t est inversible, et dans lequel l'idéal engendré par $\mathscr{I}$ est plus commode à étudier.

Ce qui suit est un exposé élémentaire d'une partie des résultats de Kashiwara et Kawai, suivi d'une *relecture* (n^{os} 1.5 & 2.5) de ces résultats en termes de transformées de Laplace.

1. Etude des microsolutions, dans le cas d'une seule variable $(n=0)$

1.0. L'ANNEAU $\mathscr{E}$ DES OPÉRATEURS MICRODIFFÉRENTIELS est défini comme l'ensemble des séries formelles $P = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, \partial_t^k$, où les $a_k \in \mathbf{C}\{t\}$ ont un disque de convergence commun, vérifiant les deux conditions suivantes:

i) *ordre fini:* $a_k = 0$ pour $k > m$ (« *l'ordre* » de P);

ii) « convergence de Borel »: la série $\sum_{k\in\mathbf{N}} a_{-k}(t)\,\dfrac{\theta^k}{k!}$ est absolument convergente pour $|\,t\,|$, $|\,\theta\,|$ assez petits.

La loi de composition dans $\mathscr{E}$ (que nous n'écrirons pas ici) est une extension naturelle de la loi de composition dans $\mathscr{D}$ (sous-anneau des $P \in \mathscr{E}$ tels que $a_k = 0$ pour tous $k < 0$); cf. par exemple [14] (Microlocalisation) pour plus de détails. On note $\mathscr{E}(m)$ l'espace des opérateurs microdifférentiels d'ordre $(\leqslant)\, m$. En particulier $\mathscr{E}(0)$ est un sous-anneau de $\mathscr{E}$, et la multiplication à droite ou à gauche par ∂_t^m $(m\in\mathbf{Z})$ établit une bijection entre $\mathscr{E}(0)$ et $\mathscr{E}(m)$.

PROPOSITION: *$\mathscr{E}$ est un anneau principal.* (Notons que cette proposition est fausse pour l'anneau $\mathscr{D}$).

Idée de la démonstration: Comme ∂_t est inversible dans $\mathscr{E}$, tout idéal $\mathscr{I}$ de $\mathscr{E}$ peut être engendré par des opérateurs d'ordre exactement 0, c'est-à-dire, après division par un élément inversible de $\mathbf{C}\{t\}$, de la forme $P = t^m + P'$, $P' \in \mathscr{E}(-1)$; l'entier m est la « valuation » de P (ne pas confondre avec l'ordre!). J'affirme alors qu'un élément P de $\mathscr{I}$ dont la valuation est minimale engendre nécessairement $\mathscr{I}$: cela résulte immédiatement d'un *théorème de division* dans $\mathscr{E}(0)$, qui nous dit que tout élément de $\mathscr{E}(0)$ peut être divisé par P, avec un reste de valuation strictement inférieure.