

# 1. Etude des microsolutions, dans le cas d'une seule variable ( $n = 0$ )

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

En fait Kashiwara et Kawai placent d'emblée le problème dans le cadre « microdifférentiel », c'est-à-dire que l'anneau  $\mathcal{D}$ , difficile à manier, est remplacé par un anneau plus grand dans lequel l'opérateur  $\partial_t$  est inversible, et dans lequel l'idéal engendré par  $\mathcal{I}$  est plus commode à étudier.

Ce qui suit est un exposé élémentaire d'une partie des résultats de Kashiwara et Kawai, suivi d'une *relecture* (nos 1.5 & 2.5) de ces résultats en termes de transformées de Laplace.

### 1. ETUDE DES MICROSOLUTIONS, DANS LE CAS D'UNE SEULE VARIABLE ( $n=0$ )

1.0. L'ANNEAU  $\mathcal{E}$  DES OPÉRATEURS MICRODIFFÉRENTIELS est défini comme l'ensemble des séries formelles  $P = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \partial_t^k$ , où les  $a_k \in \mathbf{C}\{t\}$  ont un disque de convergence commun, vérifiant les deux conditions suivantes :

- i) *ordre fini* :  $a_k = 0$  pour  $k > m$  (« l'ordre » de  $P$ );
- ii) « convergence de Borel » : la série  $\sum_{k \in \mathbf{N}} a_{-k}(t) \frac{\theta^k}{k!}$  est absolument convergente pour  $|t|, |\theta|$  assez petits.

La loi de composition dans  $\mathcal{E}$  (que nous n'écrivons pas ici) est une extension naturelle de la loi de composition dans  $\mathcal{D}$  (sous-anneau des  $P \in \mathcal{E}$  tels que  $a_k = 0$  pour tous  $k < 0$ ); cf. par exemple [14] (Microlocalisation) pour plus de détails. On note  $\mathcal{E}(m)$  l'espace des opérateurs microdifférentiels d'ordre ( $\leq$ )  $m$ . En particulier  $\mathcal{E}(0)$  est un sous-anneau de  $\mathcal{E}$ , et la multiplication à droite ou à gauche par  $\partial_t^m$  ( $m \in \mathbf{Z}$ ) établit une bijection entre  $\mathcal{E}(0)$  et  $\mathcal{E}(m)$ .

PROPOSITION :  $\mathcal{E}$  est un anneau principal. (Notons que cette proposition est fautive pour l'anneau  $\mathcal{D}$ ).

*Idée de la démonstration* : Comme  $\partial_t$  est inversible dans  $\mathcal{E}$ , tout idéal  $\mathcal{I}$  de  $\mathcal{E}$  peut être engendré par des opérateurs d'ordre exactement 0, c'est-à-dire, après division par un élément inversible de  $\mathbf{C}\{t\}$ , de la forme  $P = t^m + P'$ ,  $P' \in \mathcal{E}(-1)$ ; l'entier  $m$  est la « valuation » de  $P$  (ne pas confondre avec l'ordre!). J'affirme alors qu'un élément  $P$  de  $\mathcal{I}$  dont la valuation est minimale engendre nécessairement  $\mathcal{I}$  : cela résulte immédiatement d'un *théorème de division* dans  $\mathcal{E}(0)$ , qui nous dit que tout élément de  $\mathcal{E}(0)$  peut être divisé par  $P$ , avec un reste de valuation strictement inférieure.

(Comme sous-produit du même théorème de division, nous obtenons une propriété fondamentale, utilisée traditionnellement pour motiver l'introduction des opérateurs microdifférentiels: *un opérateur microdifférentiel est inversible si et seulement si son symbole principal est non nul à l'origine*).

Grâce à la proposition ci-dessus, notre problème devient le suivant:

*étudier les microsolutions d'un opérateur  $P = t^m + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \partial_t^{-k}$ .*

### 1.1. ACTION DE $P$ SUR LES FONCTIONS HOLOMORPHES

A la série formelle  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \partial_t^{-k}$  on associe le noyau intégral  $K(t, u)$   
 $= \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!}$ , qui grâce à la condition de convergence ii) est holomorphe pour  $|t|, |u|$  assez petits. Soit donc  $D$  un disque ouvert assez petit pour que  $K$  soit holomorphe dans un voisinage de  $\bar{D} \times \bar{D}$ . Pour tout ouvert simplement connexe  $U \subset D$ , et pour tout  $t_0 \in U$ , on définit  $P_{t_0}: \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(U)$  par la formule

$$(P_{t_0}\psi)(t) = t^m\psi(t) + \int_{t_0}^t K(t, u) \psi(u) du.$$

En particulier  $(\partial_t^{-1})_{t_0}$  est l'opérateur qui à toute fonction holomorphe associe sa primitive nulle en  $t_0$ .

### 1.2. MICROSOLUTIONS DE $P$

Commençons par définir, sur  $D^* = D \setminus \{0\}$ , le faisceau  $\text{Sol}^{\bar{D}}$  des solutions mod.  $\mathcal{O}(\bar{D})$ , où  $\mathcal{O}(\bar{D})$  désigne désormais l'algèbre de Banach des fonctions continues sur  $\bar{D}$  et holomorphes sur  $D$ : pour tout ouvert simplement connexe  $U \subset D^*$  on pose

$$\text{Sol}^{\bar{D}}(U) = \{\psi \in \mathcal{O}(U) \mid P_{t_0}\psi \in \mathcal{O}(\bar{D}) \text{ pour un } t_0 \in U\};$$

remarquons que cette définition ne dépend pas du choix de  $t_0$ , car

$$P_{t_0}\psi - P_{t_1}\psi = \int_{t_0}^{t_1} K(t, u) \psi(u) du$$

est holomorphe dans un voisinage du disque  $\bar{D}$ .

THÉORÈME:

i) *Tout germe de solution mod.  $\mathcal{O}(\bar{D})$  se prolonge sur tout  $D^*$  en fonction analytique multiforme.*

ii) Le faisceau quotient  $\text{Sol}^{\bar{D}}/\mathcal{O}(\bar{D})$ , que nous noterons  $\text{sol}^{\bar{D}}$ , est un système local d'espaces vectoriels de dimension  $m$  (l'espace des « microsolutions » de  $P \bmod \mathcal{O}(\bar{D})$ ).

En fait, cet énoncé est valable dans une situation plus générale qui nous sera utile au paragraphe suivant :

*Situation « semi-locale »* : dans la définition de l'opérateur  $P$ ,  $t^m$  peut être remplacé par un polynôme unitaire  $p(t)$  de degré  $m$ , ayant toutes ses racines  $S_1, \dots, S_l$  dans le disque  $D$  (de multiplicités relatives  $m_1, \dots, m_l$ , avec  $m_1 + \dots + m_l = m$ ); on note alors  $D^* = D \setminus \{S_1, \dots, S_l\}$ .

Avant de démontrer le théorème (dans la situation semi-locale) énonçons deux lemmes :

LEMME 1. Pour tout  $t_0 \in D^*$ , l'opérateur  $P_{t_0}: \mathcal{O}_{t_0} \rightarrow \mathcal{O}_{t_0}$  est bijectif.

*Preuve.*  $P_{t_0} = p(t) + \int_{t_0}^t K$ , où  $p(t)$  est un isomorphisme et  $\int_{t_0}^t K$  une perturbation de norme aussi petite qu'on veut dans l'espace de Banach des fonctions holomorphes sur un disque assez petit de centre  $t_0$ .

LEMME 2. Pour tout disque  $D_0 \subset D$  (de centre  $t_0$  arbitraire), l'opérateur de  $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$  dans  $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$  défini par

$$\psi(t) \mapsto \int_{t_0}^t K(t, u)\psi(u) du$$

est un opérateur compact.

*Preuve.* Appliquer le critère d'Ascoli.

*Preuve du théorème* (d'après J. E. Björk [3]).

i) Soit  $\psi$  un germe de solution mod.  $\mathcal{O}(\bar{D})$ , admettant un prolongement analytique dans un ouvert  $U \subset D^*$ , et soit  $D_0$  un disque de centre  $t_0 \in U$ , non inclus dans  $U$ , mais d'adhérence  $\bar{D}_0 \subset D^*$ . Posant  $\theta = P_{t_0}\psi \in \mathcal{O}(\bar{D})$ , on va montrer que l'équation  $P_{t_0}\psi' = \theta$  admet dans  $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$  une solution unique, qui sera donc le prolongement analytique de  $\psi$ . Il suffit pour cela de remarquer que l'opérateur  $P$  de  $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$  dans  $\mathcal{O}(\bar{D}_0)$  est d'une part injectif (en vertu du lemme 1 et du principe de prolongement analytique), d'autre part d'indice 0 car déduit de l'opérateur  $p$  (évidemment bijectif) par une perturbation compacte (lemme 2).

ii) Comme opérateur de  $\mathcal{O}(\bar{D})$  dans  $\mathcal{O}(\bar{D})$ ,  $P_{t_0}$  se déduit par perturbation compacte (lemme 2) de l'opérateur  $p$  qui est d'indice  $-m$  (injectif, de conoyau



de dimension  $m$ ).  $P_{t_0}$  est donc d'indice  $-m$ , et pour  $t_0 \in D^*$  il est injectif en vertu du lemme 1 et du principe de prolongement analytique. Son conoyau est donc de dimension  $m$ . Soit  $\theta_1, \dots, \theta_m \in \mathcal{O}(\bar{D})$  des fonctions définissant une base de ce conoyau. D'après le lemme 1 les équations  $P_{t_0}\psi_1 = \theta_1, \dots, P_{t_0}\psi_m = \theta_m$  se résolvent de façon unique dans  $\mathcal{O}_{t_0}$ , et l'on vérifie immédiatement que  $\psi_1, \dots, \psi_m$  définissent une base de  $\text{Sol}_{t_0}^{\bar{D}}/\mathcal{O}(\bar{D})$ .

### 1.3. EXEMPLE: MICROSOLUTIONS AU VOISINAGE D'UN POINT SIMPLE ( $m=1$ )

Si  $P$  est de valuation  $m = 1$  à l'origine, tout élément de  $\mathcal{E}(0)$  peut être divisé par  $P$  avec un reste à coefficients constants (cf. par exemple [14] Microloc. §3). En particulier, la division  $t = QP + R$  permet ainsi de se ramener au cas où le générateur de l'idéal est de la forme  $P = t - R$ ,  $R \in \mathcal{E}(-1)$  à coefficients constants.

Ecrivant donc  $P = t + \alpha \partial_t^{-1} + \dots$  ( $\alpha \in \mathbb{C}$ ), on peut démontrer le

LEMME. *Il existe un opérateur d'ordre 0 à coefficients constants.*

$$Q = 1 + c_1 \partial_t^{-1} + c_2 \partial_t^{-2} + \dots,$$

tel que  $PQ = Q(t + \alpha \partial_t^{-1})$ .

COROLLAIRE. *L'opérateur  $Q^{-1}$  transforme les microsolutions  $\psi$  de  $P$  en les microsolutions  $\tilde{\psi}$  de  $(t + \alpha \partial_t^{-1})\tilde{\psi} = 0 \pmod{\mathcal{O}}$ .*

Remarquons que l'action des opérateurs microdifférentiels sur les microsolutions est bien définie, car l'ambiguïté du choix du point  $t_0$  dans 1.1 disparaît quand on passe au quotient modulo  $\mathcal{O}$ .

*Microsolutions de  $(t + \alpha \partial_t^{-1})\tilde{\psi} = 0 \pmod{\mathcal{O}}$ .*

Si  $\alpha \neq -1, -2, \dots$ , l'espace à 1 dimension des microsolutions est engendré par  $\tilde{\psi}_\alpha = \frac{1}{2\pi i} \frac{(-t)^{-\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \pmod{\mathcal{O}}$ ;

si  $\alpha = -1 - j, j \in \mathbb{N}$ , il est engendré par

$$\tilde{\psi}_\alpha = \frac{-1}{2\pi i} \frac{t^j \text{Log } t}{j!} \pmod{\mathcal{O}}$$

(les coefficients de normalisation sont choisis pour la commodité).

Dans un cas comme dans l'autre, nous noterons  $\delta_{(t)}^{(\alpha)}$  la microsolution ainsi définie.  $\delta_{(t)}^{(0)} = \delta_{(t)}$  est la « microfonction de Dirac », et avec les normalisations choisies  $\partial_t^k \delta_{(t)}^{(\alpha)} = \delta_{(t)}^{(\alpha+k)}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ .

*Microsolutions de  $(t + \alpha \partial_t^{-1} + \dots)\psi = 0 \pmod{\mathcal{O}}$*

D'après le corollaire du lemme précédent l'espace des microsolutions est engendré par la « microfonction » :

$$Q \delta_{(t)}^{(\alpha)} = \delta_{(t)}^{(\alpha)} + c_1 \delta_{(t)}^{(\alpha-1)} + c_2 \delta_{(t)}^{(\alpha-2)} + \dots$$

c'est-à-dire par la classe mod.  $\mathcal{O}$  de la fonction analytique  $g_\alpha \tilde{\Psi}_\alpha$ , où  $\tilde{\Psi}_\alpha$  a été définie précédemment, et  $g_\alpha$  est le germe de fonction holomorphe définie par

$$g_\alpha(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha-k)} (-t)^k & \text{si } \alpha \neq -1, -2, \dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{j!}{(j+k)!} t^k & \text{si } \alpha = -1-j, j \in \mathbf{N} \end{cases}$$

(on a posé  $c_0 = 1$ ).

#### 1.4. COMPARAISON DES MICROSOLUTIONS « LOCALES » ET « SEMI-LOCALES »

Dans la situation semi-locale 1.2, posons  $D' = D \setminus C_1 \cup \dots \cup C_l$ , où les « coupures »  $C_1, \dots, C_l$  sont des demi-droites parallèles disjointes issues respectivement des points singuliers  $S_1, \dots, S_l$  (disons, pour fixer les idées, les demi-droites  $t - S_i \in \mathbf{R}^+$ , en supposant  $\text{Im } S_i \neq \text{Im } S_j$  pour  $i \neq j$ ). Pour  $i = 1, \dots, l$  soit  $D_i$  un disque de centre  $S_i$ , assez petit pour que  $D'_i = D_i \setminus C_i \subset D'$  (cf. Fig. 3).

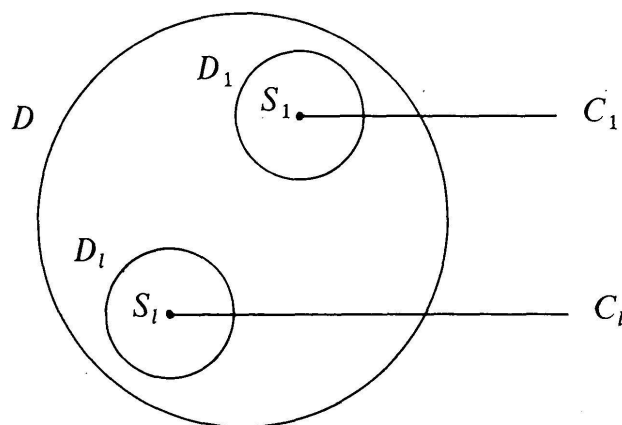


FIGURE 3

On peut alors considérer les applications linéaires  $Sp_i$  (resp.  $sp_i$ ) de « spécialisation » des (micro)-solutions définies pour tout  $i = 1, 2, \dots, l$  par la restriction des fonctions holomorphes :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{O}(\bar{D}) & \xrightarrow{\text{restriction}} & \mathcal{O}(\bar{D}_i) \\
 \cap & & \cap \\
 \text{Sol}^{\bar{D}}(D') & \xrightarrow{Sp_i} & \text{Sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \\
 \downarrow \text{sing} & & \downarrow \text{sing}_i \\
 \text{sol}^{\bar{D}}(D') & \xrightarrow{sp_i} & \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)
 \end{array}$$

où  $\text{sing}$ ,  $\text{sing}_i$  sont les applications qui à chaque solution associent la micro-solution correspondante (« singularité » de cette solution).

PROPOSITION:  $\bigoplus_{i=1}^l sp_i: \text{sol}^{\bar{D}}(D') \rightarrow \bigoplus_{i=1}^l \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

*Preuve:* Il s'agit d'espaces vectoriels de même dimension  $m = m_1 + \dots + m_l$  d'après la partie ii) du théorème 1.2. Par ailleurs la partie i) du même théorème implique immédiatement l'injectivité, car une détermination dans  $D'$  de fonction analytique multiforme dans  $D^*$  est évidemment holomorphe dans tout  $D$  si elle l'est au voisinage des points  $S_1, \dots, S_l$ .

### Remarques

i) Notons que la proposition implique en particulier que toute micro-solution locale  $\varphi_i \in \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$  peut être représentée par une solution semi-locale  $\psi$  holomorphe non seulement dans  $D'$  mais dans  $D \setminus C_i$  (c'est-à-dire non singulière aux points  $S_j, j \neq i$ )!

ii) Notons aussi que les applications de « spécialisation » qui définissent l'isomorphisme de la proposition dépendent de façon cruciale de la direction choisie pour les coupures (cela sera précisé un peu plus loin).

*Monodromies.* Etant section d'un système local d'espaces vectoriels sur  $D^*$ ,  $\text{sol}^{\bar{D}}(D')$  est muni d'une action du groupe fondamental de  $D^*$  (qui est libre non commutatif à  $l$  générateurs) et il est naturel de se demander comment cette action (la « monodromie » de  $\text{sol}^{\bar{D}}$ ) se lit dans la somme directe

$\bigoplus_i \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$ . La seule donnée de la monodromie de chaque  $\text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$  (action de  $\mathbf{Z}$ , groupe fondamental de  $D_i^* = D_i \setminus S_i$ ) est évidemment une information beaucoup plus pauvre. En fait on récupère toute l'information en se donnant les « variations » des microsolutions locales, définies ci-après :

*Variations.* Soit  $\psi_i \in \text{Sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$  une solution locale, et soit  $T_i$  la monodromie de  $\text{Sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$  (action d'un lacet tournant une fois autour de  $S_i$  dans le sens trigonométrique). Il est clair que la fonction  $\text{var}_i \psi_i = T_i \psi_i - \psi_i$  ne dépend que de la microsolution  $\text{sing}_i \psi_i$ , ce qui définit une application

$$\text{var}_i : \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \rightarrow \text{Sol}^{\bar{D}_i}(D'_i)$$

appelée « variation locale autour de  $S_i$  ».

Comme en vertu de la remarque i) ci-dessus toute microsolution locale peut être représentée par une fonction  $\psi_i \in \mathcal{O}(D')$  (et même  $\mathcal{O}(D \setminus C_j)$ ), on voit que la variation locale  $\text{var}_i$  se factorise à travers une « variation semi-locale »

$$\text{Var}_i : \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \rightarrow \text{Sol}^{\bar{D}}(D') \quad (\text{et même } \text{Sol}^{\bar{D}}(D \setminus C_j)).$$

On en déduit des « microvariations »

$$\text{var}_i^j = \text{sing}_j \circ \text{Sp}_j \circ \text{Var}_i : \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \rightarrow \text{sol}^{\bar{D}_j}(D'_j)$$

qui sont très utiles pour expliciter la façon dont l'isomorphisme de la proposition dépend de la direction choisie pour les coupures.

De façon précise, si l'on fait tourner les coupures en faisant croître leur argument  $\theta$ , et si pour un certain argument  $\theta_0$  le point  $S_j$  est « balayé » par une coupure  $C_k (k \neq j)$  et par aucune autre, alors le spécialisé  $\text{sp}'_j$  pour  $\theta \geq \theta_0$  se déduit du spécialisé  $\text{sp}_j$  pour  $\theta \leq \theta_0$  par la formule

$$\text{sp}'_j \psi = \text{sp}_j \psi - \text{var}_k^j \text{sp}_k \psi$$

(quant aux autres  $\text{sp}'_i \psi$ , ils sont tous égaux à  $\text{sp}_i \psi$  si aucun autre  $S_i$  n'est balayé par une coupure).

## 1.5. TRANSFORMÉES DE LAPLACE LOCALES ET SEMI-LOCALES

Dans la situation 1.4, supposons que les points  $S_1, \dots, S_l$  soient à une distance de l'origine inférieure à un nombre  $r$  égal à  $1/\sqrt{2}$  fois le rayon du disque  $D$ . Cela nous permettra de considérer dans  $D'$  des chemins d'intégration  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_l$  (cf. Fig. 4) dont l'origine et l'extrémité auront leurs parties réelles supérieures à  $r$ .

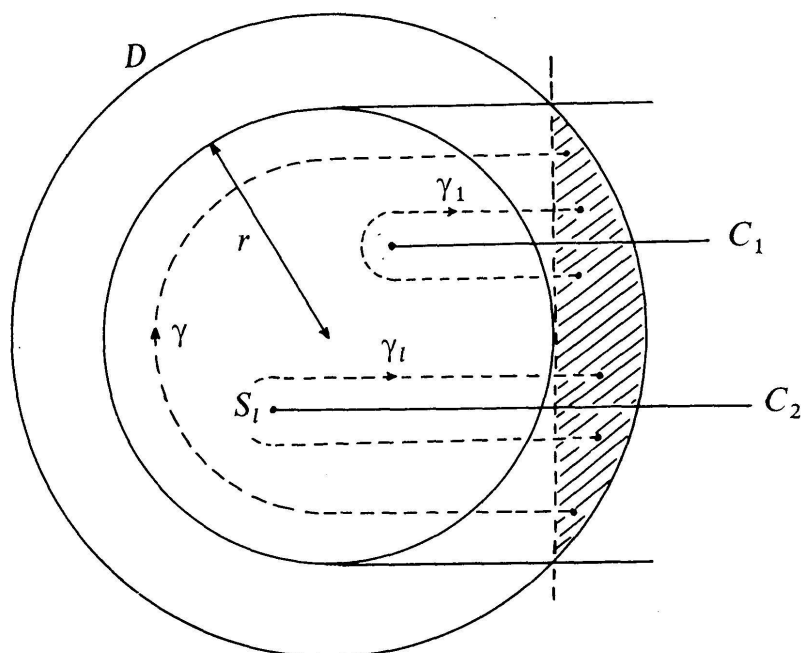


FIGURE 4

Pour  $\psi \in \text{Sol}^{\bar{D}}(D')$ , définissons la « transformée de Laplace semi-locale » par

$$(\mathcal{L}\psi)(\tau) = \int_{\gamma} e^{-\tau t} \psi(t) dt.$$

C'est une fonction holomorphe de  $\tau$  dans le demi-plan  $\text{Re } \tau > 0$ , vérifiant une condition de croissance que nous noterons ainsi :

$\mathcal{L}\psi \in \mathcal{A}^r$ , espace vectoriel des fonctions  $\phi$  holomorphes dans  $\text{Re } \tau > 0$  admettant dans tout secteur  $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \text{Arg } \tau < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  une majoration du type  $|\phi| < c_{\varepsilon} e^{r\tau}$ . En notant de même  $\mathcal{A}_{-r}$ , l'espace des  $\phi$  admettant dans tout secteur  $-\frac{\pi}{2} + \varepsilon < \text{Arg } \tau < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$  des majorations  $|\phi| < c_{\varepsilon} e^{-r'\tau}$  ( $r' < r$  arbitrairement proche de  $r$ ), on déduit immédiatement du théorème de Cauchy que la classe de  $\mathcal{L}\psi \text{ mod. } \mathcal{A}_{-r}$  ne change ni quand on déforme le chemin  $\gamma$  en astreignant son origine et son extrémité à rester dans la lunule  $D' \cap \{\text{Re } t > r\}$ , ni quand on remplace  $\psi$  par une fonction équivalente mod.  $\mathcal{O}(\bar{D})$ . Autrement dit, la transformée de Laplace semi-locale définit une application linéaire

$$\mathcal{L} : \text{sol}^{\bar{D}}(D') \rightarrow \mathcal{A}^r / \mathcal{A}_{-r}.$$

Notons que cette application est *injective* (on adapte un argument de Malgrange [11], qui définit la transformation de Laplace inverse en intégrant

sur n'importe quelle demi-droite non verticale du demi-plan  $\text{Re } \tau > 0$  dont l'origine a une partie réelle  $> 0$  arbitrairement petite).

Définissons maintenant les « transformations de Laplace locales » par les formules

$$(\mathcal{L}_i \psi)(\tau) = \int_{\gamma_i} e^{-\tau t} \psi(t) dt \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Par le même raisonnement que plus haut, mais en utilisant de plus la remarque 1.4 i), on voit que les  $\mathcal{L}_i$  définissent des applications linéaires

$$\mathcal{L}_i: \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) \rightarrow \mathcal{A}^r / \mathcal{A}_{-r} \quad (i=1, 2, \dots, l)$$

De plus, l'homologie  $\gamma \sim \sum_{i=1}^l \gamma_i$  (dans  $D'$  mod.  $D' \cap \{\text{Re } t > r\}$ ) implique

$$\mathcal{L}\psi = \sum_{i=1}^l \mathcal{L}_i \psi, \text{ c'est-à-dire } \mathcal{L} \doteq \sum_i \mathcal{L}_i \circ \text{sp}_i.$$

*Conclusion:* On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{sol}^{\bar{D}}(D') & \xrightarrow{\mathcal{L}} & \mathcal{A}^r / \mathcal{A}_{-r} \\ \downarrow \bigoplus_i \text{sp}_i & & \uparrow \sum_i \\ \bigoplus_i \text{sol}^{\bar{D}_i}(D'_i) & \xrightarrow{\bigoplus_i \mathcal{L}_i} & \bigoplus_i \mathcal{A}^r / \mathcal{A}_{-r} \end{array}$$

par lequel l'espace vectoriel à  $m$  dimensions des microsolutions semi-locales s'identifie à un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{A}^r / \mathcal{A}_{-r}$ , qui admet une décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{A}^r / \mathcal{A}_{-r}$ , image de la décomposition 1.4.

*Exemple.* Cas où tous les points  $S_i$  sont simples. Dans le cas où tous les points  $S_i$  sont simples ( $m_i=1$ ), on sait (n° 1.3) que les microsolutions locales sont de la forme  $\varphi_i = (c_0^i + c_1^i \partial_t^{-1} + \dots) \delta_{(t-S_i)}^{(\alpha_i)}$ , de sorte que leurs transformées de Laplace admettent les développements asymptotiques formels

$$\mathcal{L}_i \varphi_i \propto (c_0^i + c_1^i \tau^{-1} + \dots) \tau^{\alpha_i} e^{-\tau S_i}.$$

Les transformées de Laplace semi-locales admettront donc formellement des développements asymptotiques (non convergents)

$$\mathcal{L}\psi \propto \sum_{i=1}^l (c_0^i + c_1^i \tau^{-1} + \dots) \tau^{\alpha_i} e^{-\tau S_i}$$

tout-à-fait semblables aux développements « BKW complexes » des physiciens. Tout le travail que nous venons de faire a pour effet de donner une signification *exacte mod.  $\mathcal{A}_{-r}$*  à de tels développements.

*Remarque.* Nos transformées de Laplace n'ont dû être tronquées (mod.  $\mathcal{A}_{-r}$ ) que parce que nous ne savons pas jusqu'où les fonctions considérées peuvent être prolongées analytiquement en dehors de  $D$ . Mais considérons l'hypothèse suivante :

*Hypothèse.* Pour tout  $i = 1, \dots, l$ , la variation  $\text{Var}_i \varphi$  de toute microsolution se prolonge analytiquement dans  $E \setminus C_1 \cup \dots \cup C_l$ , où  $E$  est la bande horizontale, union des demi-droites parallèles à  $\mathbf{R}^+$  issues de  $D$ .

*Sous cette hypothèse toutes les transformées de Laplace peuvent être définies mod.  $\mathcal{A}_{-R}$  pour tout  $R > 0$ , et même exactement (comme vraies fonctions) si les  $\text{Var}_i \varphi$  sont à croissance modérée à l'infini.*

Par exemple  $\mathcal{L}_i \varphi$  pourra être définie par la formule suivante, à l'aide des chemins  $\gamma_i$  et  $\beta_i$  de la figure 5 :

$$(\mathcal{L}_i \varphi)(\tau) = \int_{\gamma_i} e^{-\tau t} \psi(t) dt - \int_{\beta_i} e^{-\tau t} (\text{Var}_i \varphi)(t) dt$$

où  $\psi$  est un représentant (analytique multiforme dans  $D^*$ ) de la microsolution  $\varphi$ ; la demi-droite  $\beta_i$  et le « lacet »  $\gamma_i$  ont leur origine commune dans  $D'$  un peu au-dessus de la coupure  $C_i$ , et l'on a représenté en pointillé sur la figure la partie de  $\gamma_i$  située dans le « 2<sup>e</sup> feuillet » (voir fig. 5).

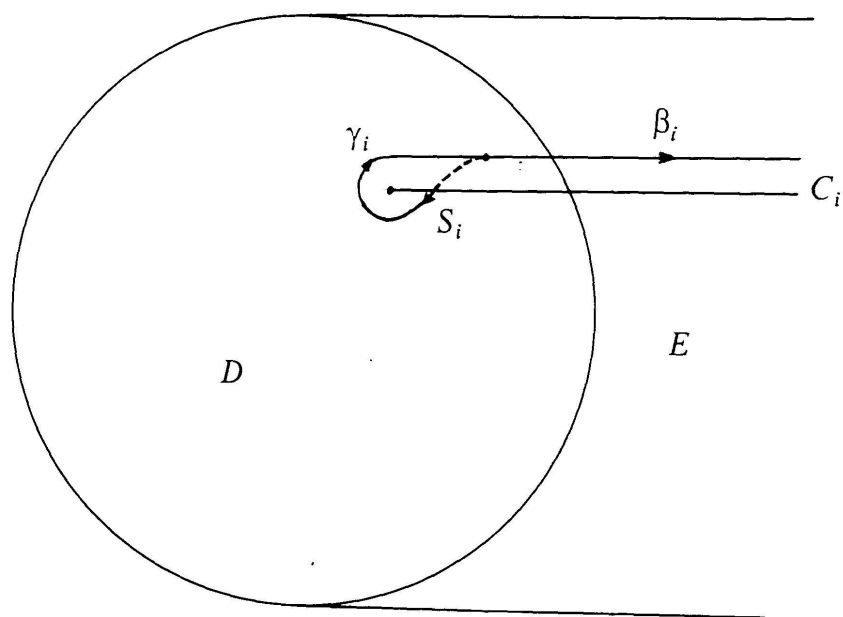


FIGURE 5