2. Etude des microsolutions dans le cas général

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

2. Etude des microsolutions dans le cas général

2.0. Microlocalisation « verticale »

Nous noterons $\bar{\omega}$ le feuilletage vertical de $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$, et $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}$ *l'anneau des opérateurs microdifférentiels « verticaux »*, c'est-à-dire l'ensemble des séries formelles $P = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \, \partial_t^k$, où les $a_k \in \mathbf{C}\{x, t\}$ ont un polydisque de convergence commun et vérifient les deux conditions suivantes:

i) *ordre fini:* $a_k = 0$ pour $k > m$ (« *l'ordre* » de P);

ii) « *convergence de Borel* »: la série $\sum_{k \in \mathbf{N}} a_{-k}(x, t) \frac{\theta^k}{k!}$ est absolument convergente pour $\| x \|$, $| t |$, $| \theta |$ assez petits.

On note $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}(m)$ l'espace des opérateurs microdifférentiels verticaux d'ordre $(\leqslant) \, m$. En particulier $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}(0)$ est un *sous-anneau* de $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}$, et la multiplication à droite ou à gauche par $\partial_t^m (m \in \mathbf{Z})$ établit une bijection entre $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}(0)$ et $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}(m)$.

Soit maintenant $\mathscr{R} = \mathscr{E}_{\bar{\omega}} < \partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n} >$ l'anneau des opérateurs polynomiaux en $\partial_{x_1}, ..., \partial_{x_n}$ à coefficients dans $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}$: on pourra convenir d'écrire ces coefficients à gauche des $\partial_{x_1}^{\alpha_1} ... \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, mais il faudra de toutes façons tenir compte des relations de commutation $[\partial_{x_i}, x_i] = 1$ au moment d'écrire la loi de composition. Ainsi $\mathscr{R}$ contient $\mathscr{D}$ comme sous-anneau, dont il est en quelque sorte le « microlocalisé vertical ». Tout comme $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}$, etc., $\mathscr{R}$ est un anneau *noethérien.* Tout comme eux il peut être considéré comme la fibre à l'origine d'un *faisceau cohérent d'anneaux* sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$.

2.1. Action de $\mathscr{R}$ sur les fonctions holomorphes

Seule l'action de $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}$ pose problème, et comme tout élément de $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}$ est la somme d'un opérateur differentiel et d'un élément de $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}(0)$, il nous suffira de définir l'action de $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}(0)$; Soit donc $P \in \mathscr{E}_{\bar{\omega}}(0)$:

$$P = p(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x, t) \, \partial_t^{-k} .$$

A la série formelle $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \, \partial_t^{-k}$ on associera le noyau intégral

$$K(x; t, u) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x, t) \frac{(t-u)^{k-1}}{(k-1)!} ,$$

qui grâce à la condition de convergence ii) est holomorphe pour $\| x \|$, $| t |$, $| u |$ assez petits. Soient donc B une boule de $\mathbf{C}^n$ et D un disque de $\mathbf{C}$, assez petits pour que p [resp. K] soit holomorphe dans un voisinage de

$\bar{B} \times \bar{D}$ [resp. $\bar{B}\times\bar{D}\times\bar{D}$]. Pour tout ouvert $V \times U \subset B \times D$, avec U simplement connexe, et pour tout $t_0 \in U$, on définit $P_{t_0}: \mathcal{O}(V \times U) \to \mathcal{O}(V \times U)$ par la formule

$$(P_{t_0}\psi)(x, t) = p(x, t)\psi(x, t) + \int_{t_0}^{t} K(x; t, u)\psi(x, u)du .$$

En particulier $(\partial_t^{-1})_{t_0}$ est l'opérateur qui à toute fonction holomorphe associe sa « primitive verticale » nulle sur l'hyperplan $t = t_0$.

On en déduit pour tout $R \in \mathcal{R}$ un opérateur

$$R_{t_0}: \mathcal{O}(V \times U) \to \mathcal{O}(V \times U)$$

bien défini pourvu que $V \times U$ soit assez petit (et U simplement connexe).

Remarque. Il sera parfois utile d'étendre l'action des opérateurs R_{t_0} aux fonctions analytiques multiformes dans le complémentaire d'une hypersurface $\mathcal{S}$. Mais on prendra garde que cette action n'est pas définie dans les « feuilles singulières », c'est-à-dire les droites verticales où plusieurs points de $\mathcal{S}$ viennent à confluer, risquant de pincer le contour d'intégration. Le résultat d'une telle action sera donc une fonction analytique multiforme dans le complémentaire de $\mathcal{S} \cup \mathcal{T}$, où l'hypersurface $\mathcal{T}$ est l'union des droites verticales « en position singulière par rapport à $\mathcal{S}$ ».

2.2. Microsolutions d'un idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{R}$

On prend B, D assez petits pour que $\mathcal{I}$ admette des générateurs $R_1, ..., R_\nu$ dont l'action sur les fonctions holomorphes est bien définie dans $B \times D$.

Solutions mod. $\mathcal{O}(\cdot \times D)$. Pour $V \times U \subset B \times D$ comme au n° 2.1, on définit l'espace

$$\mathrm{Sol}^D(V \times U) = \{\psi \in \mathcal{O}(V \times U) \mid (R_\lambda)_{t_0}\psi \in \mathcal{O}(V \times D), \lambda = 1, ..., \nu\} ,$$

dont il convient de remarquer qu'il ne dépend pas du choix du point $t_0 \in U$. Il ne dépend pas non plus du choix des générateurs de l'idéal $\mathcal{I}$ pourvu que ceux-ci convergent dans $V \times D$ (on prendra garde en vérifiant ce point que l'égalité $R_{t_0}(R'_{t_0}\psi) = (R R')_{t_0}\psi$ n'est pas vraie; toutefois elle l'est mod. $\mathcal{O}(V \times D)$, ce qui nous suffit).

Microsolutions. Pour $V \times U$ comme ci-dessus, on définit

$$\mathrm{sol}^D(V \times U) = \mathrm{Sol}^D(V \times U)/\mathcal{O}(V \times D) .$$

En passant à la limite inductive sur les petits ouverts $V \times U$ nous avons ainsi défini deux faisceaux Sol^D et sol^D, que nous étudierons sur l'espace $(B \times D)^* = B \times D \backslash \mathcal{S}$ complémentaire du *lieu singulier* $\mathcal{S}$ du système

$\mathscr{M} = \mathscr{R}/\mathscr{I}$. Ce dernier sera supposé *holonome, non caractéristique pour le feuilletage vertical* (toutes les notions introduites au §0 se transfèrent sans modification aux $\mathscr{R}$-modules, avec la simplification supplémentaire que la variété caractéristique ne contient jamais la section nulle du fibré cotangent).

Le lieu singulier $\mathscr{S}$ est donc une hypersurface transverse au feuilletage (à trace finie dans chaque feuille), et nous pouvons choisir B, D de telle sorte que $\mathscr{S} \cap (B \times D)$ ne rencontre pas $B \times \partial D$ (∂D = bord du disque).

THÉORÈME. *Avec les hypothèses ci-dessus, et si* B, D *sont assez petits,*

i) *pour tout ouvert* $V \times U \subset (B \times D)^* = B \times D \backslash \mathscr{S}$, *avec* V, U *simplement connexes, toute* $\psi \in \mathrm{Sol}^D(V \times U)$ *se prolonge en fonction analytique multiforme sur* $(V \times D)^* = V \times D \backslash \mathscr{S}$;

ii) *le faisceau* sol^D *des microsolutions est localement constant sur* $(B \times D)^*$, *où il définit un système local d'espaces vectoriels de dimension finie.*

Preuve de la partie i). Il s'agit d'un résultat de « prolongement analytique vertical » dont la démonstration peut être calquée sur le cas $n = 0$ (théorème 1.2 i)), après quelques préparatifs algébriques dont voici l'esquisse: grâce à un théorème de division dans l'anneau des opérateurs microdifférentiels (cf. par exemple [14] Microloc. §3), l'hypothèse non caractéristique implique que $\mathscr{M}$ peut être considéré comme la fibre à l'origine d'un $\mathscr{E}_{\bar{\omega}}$-Module cohérent de support $\mathscr{S}$; on en déduit l'existence dans $\mathscr{I} \cap \mathscr{E}_{\bar{\omega}}(0)$ d'un opérateur P dont le symbole principal $p(x, t)$ est une équation (non nécessairement réduite) de $\mathscr{S}$.

Alors un argument de « perturbation compacte » analogue à celui de 1.2 montre que P, tout comme p, est un isomorphisme sur tous les $B_0 \times D_0 \subset V \times D \backslash \mathscr{S}$, ce qui démontre l'existence du prolongement analytique multiforme sur $V \times D \backslash \mathscr{S}$ de toute solution de P mod. $\mathscr{O}(V \times D)$.

Quant à la partie ii) du théorème, nous en dirons quelques mots au n° 2.4, où seront donnés des énoncés plus précis.

2.3. MICROSOLUTIONS LOCALES AU VOISINAGE D'UN POINT GÉNÉRIQUE DE $\mathscr{S}$

Plaçons-nous maintenant au voisinage d'un point générique de $\mathscr{S}$, c'est-à-dire un point S au voisinage duquel $\mathscr{S}$ est lisse et transverse aux feuilles x = Cte; prenons pour $B \times D$ un voisinage assez petit de S, dans lequel $\mathscr{S}$ sera donnée par l'équation $t = 0$ (on peut toujours se ramener à ce cas par un changement de coordonnées locales respectant le feuilletage). Pour étudier la structure des microsolutions, on essaye de se ramener au cas d'une seule variable en cherchant un changement d'inconnue $\tilde{\psi} = Q\psi$ qui mette le système sous la forme

$$P(t, \partial_t^{-1})\tilde{\psi} = 0, \qquad \partial_{x_1}\tilde{\psi} = \dots = \partial_{x_n}\tilde{\psi} = 0.$$

En fait, cela n'est possible en général qu'en prenant Q dans un anneau plus grand, l'anneau des opérateurs microdifférentiels *d'ordre infini*, qui heureusement agit lui aussi sur les microfonctions. Le cas où l'on peut prendre Q d'ordre fini est le cas où le système est « *à singularité régulière* » (Kashiwara-Oshima [9]; une démonstration élémentaire est esquissée dans [15], et détaillée dans [4]).

Conclusion. Le faisceau sol^D (avec D comme ci-dessus) définit sur $(B \times D)^*$ un système local d'espaces vectoriels de dimension m = « multiplicité » du système microdifférentiel au point S (= valuation de l'opérateur P ci-dessus).

Cas particulier. S est un point « simple », c'est-à-dire que $m = 1$. C'est le cas le plus simple de singularité régulière. L'opérateur P peut alors être mis sous la forme $P = t + \alpha\partial_t^{-1}$, comme au n° 1.3, et l'on en déduit que l'espace des microsolutions est engendré par une « microfonction » de la forme

$$Q(x, \partial_t^{-1})\,\delta_{(t)}^{(\alpha)} = c_0(x)\,\delta_{(t)}^{(\alpha)} + c_1(x)\,\delta_{(t)}^{(\alpha-1)} + c_2(x)\,\delta_{(t)}^{(\alpha-2)} + \dots$$

où $\delta_{(t)}^{(\alpha)}$ est la « dérivée α-ième » ($\alpha \in \mathbf{C}$) de la microfonction de Dirac, définie comme en 1.3 (indépendante de x).

2.4. Décomposition « de Stokes » des microsolutions

Reprenons maintenant B et D comme en 2.2, et posons $(B \times D)' = B \times D \backslash C$, où C désigne la « *coupure* » $C = \bigcup_{S \in \mathscr{S}} S + \mathbf{R}^+$, en notant $S + \mathbf{R}^+ = \{x, s+t) \mid (x, s) = S, t \in \mathbf{R}^*\}$. Nous voulons définir une décomposition de l'espace $\mathrm{sol}^D((B \times D)')$ en somme directe finie d'espaces de microsolutions *locales* du type 2.3:

$$\mathrm{sol}_S = \mathrm{sol}^{D_S}((B_S \times D_S)'),$$

où S est un point générique de $\mathscr{S}$ (au sens 2.3), $B_S \times D_S$ est un voisinage assez petit de S, et $(B_S \times D_S)'$ désigne ce même voisinage privé de la coupure *locale* correspondante:

$$(B_S \times D_S)' = B_S \times D_S \backslash C_S, \quad C_S = \bigcup_{S \in \mathscr{S} \cap (B_S \times D_S)} S + \mathbf{R}^+.$$

Notons que les espaces vectoriels sol_S ainsi définis ne dépendent pas de la taille des voisinages (pourvu que ceux-ci soient assez petits: cf. lemme ci-après) et se recollent de façon évidente quand S parcourt $\mathscr{S}^*$, ensemble des points génériques au sens 2.3, en un système local sur $\mathscr{S}^*$ d'espaces vectoriels de dimension finie (cf. 2.3).

Si de plus on prend S dans $\mathscr{S}'$, ouvert dense de $\mathscr{S}^*$ formé des points qui ne sont sur aucune demi-droite $S' + \mathbf{R}^+$ issue d'un autre point S' de $\mathscr{S}$, il est clair qu'on a comme en 1.4 une application linéaire de « *spécialisation* »

$$\mathrm{sp}_S : \mathrm{sol}^D((B \times D)') \to \mathrm{sol}_S ,$$

localement constante quand S *parcourt* $\mathscr{S}'$.

Posons $B^* = B \backslash \Delta$, où Δ est l'hypersurface complexe « *de bifurcation* » (projection de la partie non générique de $\mathscr{S}$). Pour $x \in B^*$, $\mathscr{S}_x = \mathscr{S} \cap (\{x\} \times D)$ consiste en l points distincts, d'où sont issues l coupures $S_i + \mathbf{R}^+ (i = 1, \ldots, l)$; nous noterons B' l'ouvert dense des $x \in B^*$ pour lesquelles ces l coupures sont disjointes. Les composantes connexes de B' seront appelées « régions de Stokes ». Au-dessus de chaque région de Stokes, $\mathscr{S} = \mathscr{S}'$ est un *revêtement trivial à* l *feuillets* (car en interdisant aux coupures de se recouvrir on interdit à leurs origines de s'échanger). Soient $S_1, S_2, \ldots S_l$ des points choisis sur chacun des l feuillets de ce revêtement (pour une région de Stokes donnée).

PROPOSITION. *L'application linéaire* $\bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{sp}_{S_i} : \mathrm{sol}^D((B \times D)') \to \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{sol}_{S_i}$ *est un isomorphisme (constant sur chaque région de Stokes).*

Preuve. L'injectivité est évidente, car une détermination sur $(B \times D)'$ de fonction analytique multiforme sur $(B \times D)^*$ (théorème 2.2 i)) se prolonge à tout $B \times D$ si elle se prolonge au voisinage de chaque branche de $\mathscr{S}$.

La preuve de la surjectivité peut se décomposer en deux étapes.

1^{re} étape: surjectivité de l'application $\mathrm{sol}^D((V \times D)') \to \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{sol}_{S_i}$ pour tout ouvert V inclus dans une région de Stokes.

Elle découle immédiatement du lemme plus général suivant, qui montre dans quelle mesure le faisceau sol^D des microsolutions est indépendant du choix de D.

LEMME. *Sous les hypothèses du théorème 2.2, soit* $D_0 \subset D$ *un disque de centre arbitraire tel que* $\mathscr{S} \cap (V \times \partial D_0) = \emptyset$ *(∂D_0 désigne le bord de D_0). Alors l'homomorphisme de spécialisation des microsolutions*

$$\mathrm{sol}^D((V \times D_0)') \to \mathrm{sol}^{D_0}((V \times D_0)')$$

est surjectif (et évidemment bijectif si $\mathscr{S} \cap (V \times D_0) = \mathscr{S} \cap (V \times D)$.

Remarque préliminaire. Commençons par considérer les « variations » d'une microsolution $\varphi \in \mathrm{sol}^{D_0}_{(x_0, t_0)}$, c'est-à-dire les fonctions analytiques multiformes dans $(V \times D_0)^*$, différences de 2 déterminations d'un représentant ψ de φ. On vérifie facilement que ces variations sont des solutions de $\mathscr{I}$ mod. $\mathcal{O}(\cdot \times D)$, car si l'on compare au point (x_0, t_0) les germes de fonctions $P_{t_0}\psi_1$ et $P_{t_0}\psi_2$, où ψ_1 et ψ_2 sont deux déterminations de ψ en ce point, on trouve (par exemple pour un opérateur P de la forme 2.1)

$$P_{t_0}\psi_1 - P_{t_0}\psi_2 = \int K(x; t, u)\, \psi(x, u) du$$

(intégrale prise sur le lacet qui fait passer d'une détermination à l'autre), et cette intégrale se prolonge en fonction holomorphe dans tout le domaine d'holomorphie du noyau K.

Par conséquent, d'après la partie i) du théorème 2.2, les variations de microsolutions mod. $\mathcal{O}(\cdot \times D_0)$ se prolongent en fonctions analytiques multiformes dans $(V \times D)^*$.

Preuve du lemme. L'hypersurface $\mathscr{S} \cap (V \times D)$ se décompose en deux parties disjointes $\mathscr{S}_0$ et $\mathscr{S}_1$ avec $\mathscr{S}_0 = \mathscr{S} \cap (V \times D_0)$ (et $\mathscr{S}_1$ éventuellement vide). Nous noterons $C_0 = \mathscr{S}_0 + \mathbf{R}^+$ et $C_1 = \mathscr{S}_1 + \mathbf{R}^+$ les coupures correspondantes. En prenant pour V une boule (par exemple), l'ouvert de Stein $(V \times D_0)' = V \times D_0 \backslash \mathscr{S}_0$ sera l'intersection des deux ouverts de Stein $V \times D \backslash C_0$ et $V \times D_0$. Soit alors $\psi_0 \in \mathrm{Sol}^{D_0}((V \times D_0)')$. D'après Cousin, la fonction $\psi_0 \in \mathcal{O}((V \times D_0)')$ peut s'écrire $\psi_0 = \psi + \theta$, où $\psi \in \mathcal{O}(V \times D \backslash C_0)$ et $\theta \in \mathcal{O}(V \times D_0)$. Pour tout $R \in \mathscr{I}$ la fonction $R_{t_0}\psi$ sera donc, comme ψ, holomorphe dans $V \times D \backslash C_0$, et comme $R_{t_0}\psi_0$ holomorphe dans $V \times D_0$. Donc $R_{t_0}\psi$ est holomorphe dans $V \times D$ à l'exception peut-être de la partie C'_0 de la coupure C_0 située hors de $V \times D_0$.

Par ailleurs la remarque préliminaire nous dit que les variations de la microsolution φ, c'est-à-dire les différences de déterminations de ψ dans $(V \times D_0)'$, se prolongent en fonctions analytiques multiformes dans $(V \times D)^*$. On en déduit que les différences de déterminations de $R_{t_0}\psi$ sont analytiques multiformes dans $V \times D \backslash (\mathscr{S}_0 \cup \mathscr{T}_0)$, où $\mathscr{T}_0$ désigne l'union des droites verticales en position singulière par rapport à $\mathscr{S}_0$ (cf. remarque 2.1). Le fait que l'une de ces déterminations soit holomorphe dans $V \times D \backslash C'_0$ implique alors qu'elle est holomorphe dans tout $V \times D$.

2^e étape: surjectivité de l'application $\mathrm{sol}^D((B \times D)') \to \mathrm{sol}^D((V \times D)')$.

Il s'agit là d'un problème de « prolongement horizontal des microsolutions », dans lequel l'hypothèse non caractéristique doit jouer un rôle essentiel. J'aimerais beaucoup en lire une démonstration élémentaire convaincante (une possibilité est indiquée à la fin du n° 2.5). La démonstration de Kashiwara-Kawai dans [6] (chap. III, §6, Prop. 4.6.1) fait appel aux outils sophistiqués de Kashiwara et Schapira sur le problème de Cauchy « microhyperbolique » [10].

Rappelons que modulo cette deuxième étape, nous avons achevé la démonstration de la partie ii) du théorème 2.2.

2.5. Transformées de Laplace des microsolutions

On prend la boule B assez petite pour que $\forall x \in B$, $\mathscr{S}_x$ soit inclus dans le disque de rayon r, en notant $r\sqrt{2}$ le rayon du disque D. La situation est donc celle de 1.5 avec paramètres (avec confluences possibles de points de $\mathscr{S}_x$ pour certaines valeurs des paramètres). On se reportera à la figure 4 de 1.5 pour y voir la définition du chemin γ, qui maintenant dépend continûment de x pour $x \in B$, ainsi que la définition des chemins γ_i, qui eux ne peuvent tous dépendre continûment de x que sur une région de Stokes B^σ, et seront donc notés γ_i^σ (l'indice σ numérote les régions de Stokes, définies en 1.4).

L'intégration sur γ permet comme en 1.5 de définir la transformation de Laplace

$$\mathscr{L}: \mathrm{sol}^D((B \times D)') \to \mathscr{A}^r(B)/\mathscr{A}_{-r}(B)$$

où $\mathscr{A}^r(B)$ resp. $\mathscr{A}_{-r}(B)$ désigne l'espace des fonctions holomorphes dans $B \times \mathbf{C}_\tau^+$(où $\mathbf{C}_\tau^+ = \{\tau \in \mathbf{C} | \mathrm{Re}\,\tau > 0\}$) vérifiant *localement au-dessus de B* des conditions de croissance analogues à celles introduites en 1.5.

On montre comme en 1.5 que $\mathscr{L}$ est une application *injective*, qui identifie l'espace des microsolutions à un sous-espace vectoriel $\mathscr{V}$ de $\mathscr{A}^r(B)/\mathscr{A}_{-r}(B)$. De même l'intégration sur les γ_i^σ permet de définir des transformations de Laplace locales $\mathscr{L}_i^\sigma$: au-dessus d'une région de Stokes B^σ, où l'on a numéroté $\mathscr{S}_1^\sigma, \ldots, \mathscr{S}_l^\sigma$ les feuillets de $\mathscr{S}$, et noté $\mathrm{sol}_i^\sigma (i = 1, \ldots, l)$ les espaces de microsolutions locales correspondant aux $\mathscr{S}_i^\sigma$, on pourra définir pour tout $\varphi \in \mathrm{sol}_i^\sigma$

$$(*) \qquad \mathscr{L}_i^\sigma \varphi = \int_{\gamma_i} e^{-\tau t} \psi(x, t) dt \qquad \mathrm{mod}\ \mathscr{A}_{-r}(B^\sigma)$$

où ψ est n'importe quel représentant de φ holomorphe dans $B^\sigma \times D \backslash \mathscr{S}$. En fait on peut même prendre ψ holomorphe dans $B^\sigma \times D \backslash \mathscr{S}_i$ (d'après le lemme 2.4), et dans ce cas le chemin d'intégration γ_i dans (*) peut être remplacé par γ (théorème de Cauchy). Une fois ce remplacement fait, l'intégrale ne dépend que de la classe de ψ dans $\mathrm{sol}^D((B^\sigma \times D)')$, ce qui permet de se ramener au cas où ψ est holomorphe dans $(B \times D)'$ (grâce à la résolution de la 2ᵉ étape de la proposition 2.4).

Conclusion. Les $\mathscr{L}_i^\sigma \varphi$, pour $\varphi \in \mathrm{sol}_i^\sigma$, admettent des représentants holomorphes dans tout $B \times \mathbf{C}_\tau^+$ (vérifiant les conditions de croissance $\mathscr{A}_r(B)$) et définissent donc mod. $\mathscr{A}_{-r}(B)$ un sous-espace vectoriel $\mathscr{V}_i^\sigma$ de $\mathscr{V}$. De plus on a une décomposition de en somme directe

$$\mathscr{V} = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathscr{V}_i^\sigma$$

qui au-dessus de la région de Stokes B^σ n'est autre que l'image par $\mathscr{L} = \sum_{i=1}^{l} \mathscr{L}_i^\sigma$ de la décomposition $\mathrm{sol}^D((B^\sigma \times D)') = \bigoplus_{i=1}^{l} \mathrm{sol}_i^\sigma$ (cf. la proposition 2.4, dont tout ce qui précède n'est qu'une paraphrase).

Exemple. Cas où le système est simple aux points génériques de $\mathscr{S}$. Dans ce cas les espaces $\mathscr{V}_i^\sigma$ sont à 1 dimension, engendrés par des fonctions $\phi_i^\sigma(x, \tau)$ qui *dans la région de Stokes B^σ* admettent des développements asymptotiques formels

$$(**) \qquad \phi_i^\sigma(x, \tau) \quad \propto \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_{i,k}^\sigma(x)\tau^{-k}\right) \tau^{\alpha_i} e^{-\tau S_i^\sigma(x)},$$

qui doivent se comprendre comme transformés de Laplace des développements 2.3 des microsolutions en un point simple (en prenant garde dans 2.3 de remplacer la microfonction de Dirac $\delta_{(t)}^{(\alpha_i)}$ par $\delta_{(t-S_i^\sigma(x))}^{(\alpha_i)}$, où $t - S_i^\sigma(x)$ est l'équation de la branche $\mathscr{S}_i^\sigma$).

Rappelons encore que les fonctions ϕ_i^σ sont *holomorphes dans tout* $B \times \mathbf{C}_\tau^+$, bien que les coefficients $c_{i,k}^\sigma$ de leur développement asymptotique (**) soient en général singuliers sur l'hypersurface de bifurcation Δ (et se prolongent en fonctions analytiques multiformes dans le complémentaire de cette hypersurface). En dehors de la région de Stokes B^σ, le prolongement analytique du 2ⁿᵈ membre de (**) ne peut en aucune façon être compris comme un développement asymptotique formel de ϕ_i^σ.

En fait, le développement asymptotique formel de ϕ_i^σ dans une autre région de Stokes $B^{\sigma'}$ se calcule à l'aide de la « *matrice de raccordement* » $(C_{i,j}^{\sigma,\sigma'})_{i,j=1,2,\ldots,l} \in Gl_l(\mathbf{C})$:

$$\phi_i^\sigma(x, \tau) = \sum_j C_{i,j}^{\sigma,\sigma'} \phi_j^{\sigma'}(x, \tau),$$

qui ne fait qu'exprimer l'isomorphisme de « changement de décomposition »

$$\bigoplus_i \mathscr{V}_i^\sigma \leftrightarrow \bigoplus_j \mathscr{V}_j^{\sigma'},$$

et ne dépend donc que du choix de la normalisation des générateurs ϕ_i^σ des espaces vectoriels $\mathscr{V}_i^\sigma$.

Remarquons que l'isomorphisme de changement de décomposition est attaché de façon *intrinsèque* au système microdifférentiel, c'est-à-dire qu'il ne dépend que du $\mathscr{R}$-module $\mathscr{M} = \mathscr{R}/\mathscr{I}$ et pas de la façon dont celui-ci est présenté comme quotient de $\mathscr{R}$ (en effet l'espace vectoriel des microsolutions peut être défini de façon intrinsèque: sol $=$ Hom$_{\mathscr{R}}(\mathscr{M}$, microfonctions)). Ainsi par exemple le cas d'un point tournant de type « pli », étudié au §6 de l'article [17] de Voros, se réduit au cas de l'exemple iii) de notre §0 (ici $\mathscr{M}$ est le système de Gauss-Manin de la catastrophe « pli », déploiement universel de la fonction $t = z^3$).

Conclusion. Tout le travail qui précède peut être considéré comme une méthode de resommation de développements asymptotiques formels du type (**) — par exemple les développements BKW des physiciens — qui acquièrent ainsi une signification exacte modulo un reste exponentiellement petit en τ, dont le taux de décroissance exponentielle est d'autant plus fort que les microsolutions peuvent être prolongées loin à droite dans le plan complexe des t; comme indiqué à la fin de 1.5, on peut même obtenir une resommation exacte (à reste nul) si les microsolutions ont des propriétés de prolongement analytique *global* dans le plan des t avec croissance modérée à l'infini, comme c'est le cas des « *fonctions résurgentes* » d'Ecalle [5], qui justement apparaissent dans les modèles semi-classiques étudiés par Voros [17].

Mise en garde au lecteur. Les développements asymptotiques dont il est question ici n'ont pas grand-chose à voir avec ceux qu'étudient Kashiwara et Kawai dans [7]: ces derniers sont purement *locaux*, ce qui exclut la prise en compte de termes exponentiellement petits, alors que les nôtres sont en quelque sorte « semi-locaux ».

Remarque technique. Il serait intéressant, suivant une suggestion de Malgrange, d'utiliser la transformation de Laplace comme outil technique pour démontrer la proposition 2.4 (2^{e} étape de la preuve) de façon plus élémentaire que dans Kashiwara-Kawai [6]. L'idée consisterait à démontrer que les intégrales de Laplace $\phi(x, \tau)$, définies au départ seulement au-dessus des régions de Stokes, admettent des prolongements analytiques au-dessus de tout B, avec contrôle uniforme en x du comportement asymptotique en τ (ce qui permet de repasser aux $\psi(x, t)$ par « Laplace inverse »). L'article [11] de Malgrange me semble contenir tout ce qu'il faut pour faire ce travail (on y étudie, au voisinage de $\tau = \infty$, le système différentiel en (x, τ) « transformée de Laplace » du système microdifférentiel considéré.

2.6. Qu'est-ce qu'un « point tournant »?

Nous avons appelé « points de bifurcation » les projections des points singuliers de $\mathscr{S}$ (relativement au feuilletage vertical). Certains points singuliers sont d'un type trivial, et ne donnent pas lieu à des singularités des développements asymptotiques: ce sont les points où le système $\mathscr{M}$ est localement somme directe de systèmes du type 2.3 (par exemple les points où 2 nappes lisses de $\mathscr{S}$ se coupent transversalement).

Il me semble conforme à l'usage des physiciens d'appeler « points tournants » les points de bifurcation qui sont projections de points singuliers *non triviaux* de $\mathscr{S}$.

Notons que la trivialité d'un point singulier ne dépend pas seulement de la géométrie de $\mathscr{S}$; par exemple, en un point où deux nappes lisses de $\mathscr{S}$ ont un contact quadratique en codimension 1, il existe deux types de systèmes holonomes simples aux points génériques; celui de ces deux types qui n'est pas trivial est connu des physiciens sous le nom d'« intersection effective de deux singularités de Landau » (cf. [8] et [15] pour une étude mathématique de cet exemple).

3. Appendice sur le cas réel : solutions microfonctions de Sato

Considérant $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}$ comme le complexifié de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, nous nous proposons d'étudier les solutions de notre système microdifférentiel *dans le faisceau $\mathscr{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$ des microfonctions de Sato.* Rappelons [17] que $\mathscr{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$ est un faisceau sur le fibré $S^*(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$ des directions de demi-droites cotangentes à $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$, et que le support du faisceau des solutions dans $\mathscr{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$ est inclus dans la variété caractéristique réelle du système (considérée comme sous-ensemble de $S^*(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})$). Avec notre hypothèse non caractéristique, ce support est donc *propre à fibres finies* au-dessus de $\mathbf{R}^n$, de sorte que les solutions dans $\mathscr{C}_{\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}}$ s'identifient aux solutions dans $\mathscr{C}_{\bar{\omega}} = (\mathscr{C}^+_{\bar{\omega}}, \mathscr{C}^-_{\bar{\omega}})$, faisceau des *familles analytiques en* $x \in \mathbf{R}^n$ *de microfonctions d'une variable réelle* t (cf. par exemple [14], Microlocalisation, §2).