SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN

Autor(en): **Preissmann, E.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-53823

L'Enseignement Mathématique, t. 30 (1984), p. 95-113

SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN

par E. PREISSMANN

LES INÉGALITÉS DE GRAND CRIBLE ET LEURS APPLICATIONS

Le grand crible est une idée relativement récente, permettant par exemple de démontrer le théorème de Bombieri-Vinogradov [2] ou de montrer que pour n assez grand on a $2n = p + P_k$ (p étant premier et P_k produit de k facteurs premiers au plus). Barban [1] a trouvé $k = 4$, et Chen (voir [3]) $k = 2$.

Notons $e(\theta) = e^{2i\pi\theta}$ et soient $a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots, a_{M+N}$ des nombres complexes arbitraires. Posons

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha)\,.$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_R$ des nombres réels distincts modulo 1 et posons

$$\delta = \operatorname*{Min}_{\substack{r,\, s,\, n \in \mathbf{Z} \\ r \neq s}} |\, \alpha_r - \alpha_s - n \,|\,.$$

Une inégalité de grand crible est du type

$$\text{(A)} \qquad \sum_r |\, S(\alpha_r) \,|^2 \leqslant C(N, \delta) \sum_n |\, a_n \,|^2$$

(vérifiée pour (a_n) et (α_r) arbitraires).
Si $R = 1$, on trouve $|\, S(\alpha_1) \,|^2 \leqslant N \cdot \Sigma \,|\, a_n \,|^2$ (inégalité de Schwarz) et si $N = 1$, $\sum_r |\, S(\alpha_r) \,|^2 = R \cdot |\, a_{M+1} \,|^2 \leqslant \delta^{-1} \,|\, a_{M+1} \,|^2$.

On a trouvé diverses expressions de $C(N, \delta)$ [4] mais il est surprenant qu'on ait pu réunir les deux inégalités précédentes et montrer que $C(N, \delta) = N + \delta^{-1} - 1$ satisfait (A) [5]. Cette expression est la meilleure possible au sens suivant: pour R donné, on peut toujours obtenir l'égalité dans (A) [5].
On peut obtenir une forme un peu plus sophistiquée que (1):
Si $\delta_r = \operatorname*{Min}_{s \neq r,\, n \in \mathbf{Z}} |\, \alpha_r - \alpha_s - n \,|$, alors Montgomery-Vaughan [6] [7] ont montré que

$$\text{(B)} \qquad \sum_{r=1}^{R} | S(\alpha_r) |^2 (N + C\delta_r^{-1})^{-1} \leqslant \Sigma | a_n |^2$$

avec $C = \frac{3}{2}$, inégalité dont ils donnent des applications arithmétiques.

Les inégalités de Hilbert-Montgomery-Vaughan

L'inégalité (A) équivaut à dire que la norme de la matrice $R \times N \, (e(n\alpha_r))$ est inférieure ou égale à $\sqrt{C(N, \delta)}$. La matrice transposée ayant la même norme, on est conduit [6] à s'intéresser à la majoration de la norme d'une matrice du type $(\sin^{-1}\pi(\alpha_r - \alpha_s))'$ (le prime signifiant que les termes de la grande diagonale sont nuls). Cette majoration se ramène à celle de la norme d'une matrice du type $((x_r - x_s)^{-1})'$ [5]. C'est pourquoi Montgomery et Vaughan [7] ont démontré:

Soit $x_1, x_2, ..., x_r$ des nombres réels distincts,

$$\delta = \operatorname*{Min}_{\substack{r,s \\ r \neq s}} | x_r - x_s | , \qquad \delta_r = \operatorname*{Min}_{s \neq r} | x_r - x_s |$$

alors quels que soient les nombres complexes $u_1, u_2, ..., u_R$

$$\text{(C)} \qquad \left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leqslant \pi \delta^{-1} \Sigma | u_r | ,$$

$$\text{(D)} \qquad \left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leqslant \pi C \cdot \Sigma | u_r |^2 \delta_r^{-1} ,$$

avec $C = \frac{3}{2}$.

De (C) on déduit (A) avec $C(N, \delta) = N + \delta^{-1}$, et de (D) on déduit (B). Un conjecture vraisemblable est qu'on peut donner à C la valeur 1 dans (D).

Dans ce sens, j'ai montré le résultat suivant:

Théorème. (D) *reste vraie pour* $C = \frac{4}{3}$.

Notation: Tout au long de la démonstration $\delta_r = \operatorname*{Min}_{\substack{s \\ s \neq r}} | x_r - x_s |$.

Lemme 1. *Soit* $(x_r)_0^\infty$ *une suite réelle strictement croissante telle que* $x_0 = 0$; f *une fonction de* $]0, +\infty[$ *dans* $\mathbf{R}$, *intégrable à l'infini, trois fois dérivable et vérifiant* $f'(x) < 0, f''(x) > 0, f'''(x) < 0$ *pour tout* x. *Alors*

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\delta_k$$

considéré comme fonction de $x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ *est maximum pour* $x_k = kx_1$ *pour tout* k.

D'après les conditions précédentes, il est clair que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et que f et $-f'$ sont des fonctions convexes. Notons

$$a_k = x_k - \frac{1}{2}\delta_k \quad \text{et} \quad b_k = x_k + \frac{1}{2}\delta_k .$$

On a donc

$$(1) \qquad \delta_k f(x_k) < \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx \quad \text{pour tout } k .$$

D'après la définition de δ_k on sait que les intervalles $]a_k, b_k[$ sont disjoints, et donc

$$(2) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\delta_k < \int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx ,$$

d'où la convergence de la série définissant T.

(a) Supposons qu'on ait une suite telle que

$$x_1 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant x_3 - x_2 \ldots \leqslant x_n - x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n - x_{n-1} > x_{n+1} - x_n .$$

Alors:

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}+\lambda, x_{n+2}+\lambda, x_{n+3}+\lambda, \ldots) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \Bigg[\sum_{k=1}^{n-1} \delta_k f(x_k) + (x_{n+1}+\lambda-x_n)f(x_n) + \sum_{n+2}^{\infty} \delta_k f(x_k+\lambda) \\ &\qquad + \delta_{n+1}(\lambda)f(x_{n+1}+\lambda)\Bigg] \\ &= f(x_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k f'(x_k) + \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} (\delta_{n+1}(\lambda)) , \end{aligned}$$

où $\delta_{n+1}(\lambda) = \mathrm{Inf}[(x_{n+1}-x_n+\lambda), (x_{n+2}-x_{n+1})]$.
Comme $-f'$ est convexe, on trouve de manière similaire à (2):

$$-\sum_{k=n+1}^{\infty} f'(x_k)\delta_k < -\int_{a_{n+1}}^{\infty} f'(x)dx \quad \text{d'où} \quad D > f(x_n) - f(a_{n+1}) > 0 .$$

C'est pourquoi (en notant $h = [(x_n - x_{n-1}) - (x_{n+1} - x_n)]$) on a

$$T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...) < T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} + h, x_{n+2} + h, ...) .$$

(b) Supposons maintenant qu'on ait une suite telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+3} - x_{n+2} = ... \quad \text{et} \quad x_n - x_{n-1} < a .$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} - \lambda, x_{n+2} - \lambda, ...)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\delta_k + (a-\lambda)f(x_{n+1}-\lambda) + \sum_{k=n+2}^{\infty} f(x_k-\lambda)\delta_k\right]$$

$$= - f(x_{n+1}) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k f'(x_k) > - f(x_{n+1}) - \int_{x_{n+1}}^{+\infty} f'(x)dx = 0 .$$

Notons $h = a - (x_n - x_{n-1})$; on a donc

$$T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...) < T(x_1, ..., x_n, x_{n+1} - h, x_{n+2} - h, ...) ,$$

et en répétant indéfiniment ce décalage on trouve (en notant $k = x_n - x_{n-1}$)

$$T(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1} ...) < T(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1} + k, x_{n-1} + 2k, ...) .$$

(c) M étant la borne supérieure de $T(x_1, ..., x_n, ...)$, on peut supposer $T(x_1, ..., x_n, ...) > M - \varepsilon$ et par une application répétée de a) on sait que pour tout m on peut trouver une suite (y_n) telle que

$$x_1 = y_1 \leqslant y_2 - y_1 \leqslant ... \leqslant y_{m+1} - y_m \quad \text{et} \quad T(y_1, ..., y_n, ...) > T(x_1, ... x_n, ...) .$$

D'autre part

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f(y_k)\delta_k < \int_{a_{m+1}}^{\infty} f(x)dx$$

est plus petit que ε pour m assez grand, donc (en notant $l = (y_{m+1} - y_m)$)

$$T(x_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1} + l, y_{m+1} + 2l, ...) > M - \varepsilon - R_m > M - 2\varepsilon ,$$

et en appliquant b) de manière répétée on trouve

$$T(x_1, 2x_1, 3x_1, ..., kx_1, ...) > M - 2\varepsilon$$

pour tout ε, d'où le lemme.

Conséquences: on a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{x_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1}{k^2 x_1^2} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{\pi^2}{6} , \tag{3}$$

(4) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{x_k^4} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1}{k^4 x_1^4} = \frac{1}{x_1^3} \cdot \frac{\pi^4}{90},$$

(5) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{x_k^2 (x_k + a)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1}{(kx_1)^2 (kx_1 + a)^2}, \quad a > 0,$$

$$\text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{x^2}; \ \frac{1}{x^4}; \ \frac{1}{x^2(x+a)^2}.$$

LEMME 2. *Soit* $(x_n)_{n=0}^N$ *une suite réelle strictement croissante,* $x_0 = 0$, *telle que* (x_1 *et* x_N *étant fixés)*

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k}{x_k}$$

soit maximum pour $x_2, x_3, \ldots, x_{N-1}$ *variables. Alors la suite* $x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_N - x_{N-1}$ *est monotone.*

(a) Supposons que la suite est telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = \ldots = x_{n+k} - x_{n+k-1},$$
$$x_n - x_{n-1} > a, \quad x_{n+k+1} - x_{n+k} > a.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1} + \lambda, \ldots, x_{n+l} + l\lambda, x_{n+k} + k\lambda, x_{n+k+1}, \ldots, x_N)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{r=1}^{n-1} \frac{\delta_m}{x_m} + \sum_{l=0}^{k} \frac{a+\lambda}{x_{n+l} + l\lambda} + \frac{\delta_{n+k+1}(\lambda)}{x_{n+k+1}} + \sum_{m=n+k+2}^{N} \frac{\delta_m}{x_m}\right].$$

Si on remarque que $\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} \delta_{n+k+1}(\lambda) = 0$ ou $-k$ et que

$$\frac{a+\lambda}{x_{n+l} + l\lambda} = \frac{1}{l} \frac{x_{n+l} - x_n + l\lambda}{x_{n+l} + l\lambda},$$

on trouve

$$D \geqslant \sum_{l=0}^{k} \frac{x_n}{x_{n+l}^2} - \frac{k}{x_{n+k+1}} > x_n \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{x_{n+l}^2} - \frac{x_n}{a}\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+k}}\right),$$
$$D > \frac{x_n}{a}\left(a \sum \frac{1}{x_{n+l}^2} - \int_{x_n}^{x_{n+k}} \frac{dx}{x^2}\right) > 0.$$

Donc la fonction T n'est pas maximisée par cette suite.

(b) Supposons maintenant que la suite est telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = \dots x_{n+k} - x_{n+k-1},$$
$$a > x_n - x_{n-1}, \quad a > x_{n+k+1} - x_{n+k}.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}-\lambda, x_{n+2}-\lambda, \dots, x_{n+k}-\lambda, x_{n+k+1}, \dots, x_N),$$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{m=1}^{n} \frac{\delta_m}{x_m} + \frac{a-\lambda}{x_{n+1}-\lambda} + \frac{a}{x_{n+2}-\lambda} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}-\lambda} \right.$$
$$\left. + \frac{x_{n+k+1} - x_{n+k} + \lambda}{x_{n+k} - \lambda} + \frac{\delta_{n+k+1}}{x_{n+k+1}} + \sum_{m=n+k+2}^{N} \frac{\delta_m}{x_m}\right]$$

En tenant compte du fait que $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \delta_{n+k+1}(\lambda) = 0$ ou 1 et en utilisant la méthode des trapèzes on trouve

$$D \geqslant \frac{-x_n}{x_{n+1}^2} + \frac{a}{x_{n+2}^2} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}^2} + \frac{x_{n+k+1}}{x_{n+k}^2},$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+1}^2} + \frac{a}{x_{n+2}^2} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}^2} + \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+k}^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+k}^2} + \frac{1}{x_{n+k}}$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+1}^2} + \int_{x_{n+1}}^{x_{n+k}} \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+k}^2} + \frac{1}{x_{n+k}},$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+k}^2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{a}{2x_{n+1}^2} - \frac{a}{2x_{n+k}^2},$$

$$D > \frac{a}{2x_{n+1}^2} - \frac{a}{2x_{n+k}^2} \geqslant 0,$$

Donc la suite ne maximisait pas la fonction T.
De a) et b) on déduit que la suite maximisante est telle que

$$x_1, (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1}), \dots, (x_N - x_{N-1})$$

est monotone.

Lemme 3. *Soit* $(x_n)_0^N$ *une suite réelle strictement croissante telle que* $x_0 = 0$ *et que* $($$x_1$ *et* x_N *étant fixés)*

$$T(x_1, ..., x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k}{x_k}$$

est maximum $(x_2, x_3, ..., x_{N-1}$ *étant les variables). Si la suite*

$$x_1, (x_2-x_1), (x_3-x_2), ..., (x_N-x_{N-1})$$

est décroissante, alors il existe un k *tel que*

$$x_1 = x_2 - x_1 = ... = x_k - x_{k-1} \geqslant x_{k+1} - x_k \geqslant x_{k+2} - x_{k+1} = ..$$
$$= x_N - x_{N-1} .$$

a) Supposons que la suite soit telle que

$$x_{n-1} - x_{n-2} > x_n - x_{n-1} \geqslant x_{n+1} - x_n > x_{n+2} - x_{n+1} .$$

Alors

$$D = \frac{\partial}{\partial x_n} T(x_1, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1} ..., x_N) \quad \text{(dérivée à droite)},$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right] = \frac{x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1}}{x_n^2 x_{n-1}} .$$

$$D \geqslant \frac{x_n^2 - x_{n-1}(x_n + (x_n - x_{n-1}))}{x_n^2 x_{n-1}} = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n^2 x_{n-1}} > 0 .$$

donc la suite ne maximise pas la fonction T.

b) Supposons que la suite soit telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = ... = x_{n+k} - x_{n+k-1} \quad (k \geqslant 2),$$
$$a > x_{n+k+1} - x_{n+k}, \quad a < x_n - x_{n-1} .$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} + (k-1)\lambda, ..., x_{n+k-2} + 2\lambda, x_{n+k-1} + \lambda, x_{n+k}, ..., x_N),$$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{n+1} - x_n + (k-1)\lambda}{x_n} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{x_{n+l+1} - x_{n+l} - \lambda}{x_{n+l} + (k-l)\lambda} + \frac{x_{n+k+1} - x_{n+k}}{x_{n+k}} \right].$$

Notons $a_t = x_t - \frac{a}{2}$ $b_t = x_t + \frac{a}{2}$ et remarquons que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left(\frac{x_{n+l+1} - x_{n+l} - \lambda}{x_{n+l} + (k-l)\lambda} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{1}{k-l} \frac{x_{n+k} - x_{n+l} - (k-l)\lambda}{x_{n+l} + (k-l)\lambda} \right] = - \frac{x_{n+k}}{x_{n+l}^2},$$

$$D = \frac{k-1}{x_n} - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{x_{n+k}}{x_{n+l}^2},$$

et que $\dfrac{a}{x_{n+l}^2} < \displaystyle\int_{a_{n+l}}^{b_{n+l}} \frac{dx}{x^2}$.

$$D > \frac{k-1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{a} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+k-1}} \frac{dx}{x^2} = \frac{k-1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{a}\left[\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_{n+k}}\right],$$

$$D > \frac{k-1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{a}\left[\frac{(x_{n+k}-x_n-a)}{b_n\, a_{n+k}}\right] = (k-1)\left[\frac{1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{b_n\, a_{n+k}}\right],$$

$$D > \frac{k-1}{x_n\, b_n\, a_{n+k}} \cdot \left[b_n\, a_{n+k} - x_n\, x_{n+k} \right],$$

$$D > \frac{k-1}{x_n\, b_n\, a_{n+k}} \cdot \frac{a}{2}\left[x_{n+k} - x_n - \frac{a}{2} \right] > 0,$$

donc la suite ne maximise pas la fonction T.

De a) et b) on déduit que les inégalités strictes dans la suite

$$x_1 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant x_3 - x_2 \dots \leqslant x_N - x_{N-1}$$

ne peuvent être que consécutives.

LEMME 4. *Soit* $(x_n)_0^N$ *une suite réelle strictement croissante,* $x_0 = 0$, *et maximisant la fonction*

$$T(x_1, \dots, x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k}{x_k},$$

($x_2, x_3, \dots, x_{N-1}$ *étant les variables). Si*

$$x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_N - x_{N-1}$$

est une suite croissante, alors il existe un nombre n *tel que*

$$x_1 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} < x_{n+1} - x_n < \dots < x_N - x_{N-1}.$$

a) Supposons que la suite soit telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = \dots = x_{n+k} - x_{n+k-1}, \quad (k \geqslant 2),$$

$$a > x_n - x_{n-1}, \quad a < x_{n+k+1} - x_{n+k}.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}-\lambda, \ldots, x_{n+k-1}-\lambda, x_{n+k}, \ldots, x_N)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{n+1}-x_n-\lambda}{x_{n+1}-\lambda} + \frac{a}{x_{n+2}-\lambda} + \ldots + \frac{a}{x_{n+k-1}-\lambda} + \frac{a+\lambda}{x_{n+k}}\right]$$

$$= -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} + \frac{a}{x_{n+2}^2} + \ldots + \frac{a}{x_{n+k-1}^2} + \frac{1}{x_{n+k}},$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} + \int_{x_{n+2}}^{x_{n+k}} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{x_{n+k}} = -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{a^2}{x_{n+1}^2 x_{n+2}} > 0.$$

Donc cette suite ne peut maximiser T.

b) Supposons que la suite soit telle que

$$< x_2 - x_1 < \ldots < x_k - x_{k-1} < x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1} = \ldots = x_N - x_{N-1} = a.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}-(N-k-1)\lambda, x_{k+2}-(N-k-2)\lambda, \ldots, x_{N-1}-\lambda, x_N)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{k+1}-x_k-(N-k-1)\lambda}{x_{k+1}-(N-k-1)\lambda} + \frac{a+\lambda}{x_{k+2}-(N-k-2)\lambda} + \ldots + \frac{a+\lambda}{x_{N-1}-\lambda} + \frac{a+\lambda}{x_N}\right],$$

et comme

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{a+\lambda}{x_{k+l}-(N-k-l)\lambda}\right] = \frac{1}{N-k-l}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_N-x_{k+l}+(N-k-l)\lambda}{x_{k+l}-(N-k-2)\lambda}\right] = \frac{x_N}{x_{k+l}^2}.$$

on trouve

$$D = \frac{-x_k(N-k-1)}{x_{k+1}^2} + \frac{x_N}{x_{k+2}^2} + \ldots + \frac{x_N}{x_{k+l}^2} + \ldots + \frac{x_N}{x_N^2},$$

d'où (par utilisation de la formule des trapèzes)

$$D > \frac{-x_k(N-k-1)}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2}\frac{x_N}{x_N^2} + \int_{x_{k+1}}^{x_N} \frac{dx}{x^2}\cdot\frac{x_N}{a},$$

$$D > \frac{-x_k(N-k-1)}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2}\frac{x_N}{x_N^2} + \frac{x_N}{a}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_N}\right),$$

$$D > -\frac{1}{2}\frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2x_N} + \frac{x_N x_{k+1} - x_{k+1}^2 - x_k(x_N - x_{k+1})}{a x_{k+1}^2}.$$

$$D > -\frac{1}{2}\frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2x_N} + \frac{x_N a - a x_{k+1}}{a x_{k+1}^2},$$

$$D > \frac{1}{2x_N} + \frac{-x_N + 2x_N - 2x_{k+1}}{2x_{k+1}^2},$$

$$D > \frac{x_{k+1}^2 + x_N^2 - 2x_{k+1}x_N}{2x_N x_{k+1}^2} = \frac{(x_N - x_{k+1})^2}{2x_N x_{k+1}^2} \geqslant 0.$$

donc la suite ne maximise pas T.

De a) et b) on déduit le lemme.

LEMME 5. *Soit* $(x_n)_0^N$ *une suite réelle croissante,* $x_0 = 0$, *maximisant*

$$T(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k}{x_k}$$

$(x_2, \ldots, x_{N-1}$ *étant les variables).*

Alors $T(x_1, \ldots, x_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + O\left(\frac{x_1}{x_N}\right)$.

D'après le lemme 2 on voit qu'il y a deux cas.

Premier cas: La suite $x_1, x_2 - x_1, \ldots, x_N - x_{N-1}$ est décroissante. D'après le lemme 3, on a:

$$x_1 = x_2 - x_1 = \ldots = x_k - x_{k-1} > x_{k+1} - x_k \geqslant x_{k+2} - x_{k+1}$$
$$= x_{k+3} - x_{k+2} \ldots = x_N - x_{N-1} = a,$$

d'où

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k, x_{k+1}+\lambda, x_{k+2}+\lambda, \ldots, x_{N-1}+\lambda, x_N+\lambda)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{k+1} - x_k + \lambda}{x_k} + \frac{a}{x_{k+1} + \lambda} + \ldots + \frac{a}{x_N + \lambda}\right]$$
$$= \frac{1}{x_k} - a\left(\frac{1}{x_{k+1}^2} + \ldots + \frac{1}{x_N^2}\right),$$

$$D > \frac{1}{x_k} - \int_{x_{k+1}-a}^{x_N} \frac{dx}{x^2} > \frac{1}{x_k} - \int_{x_k}^{x_N} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_N} > 0.$$

Soit

$$y_{k+1} = x_{k+1} + (2x_k - x_{k+1} - x_{k-1})$$
$$y_{k+2} = x_{k+2} + (2x_k - x_{k+1} - x_{k-1})$$
$$\vdots$$
$$y_N = x_N + (2x_k - x_{k+1} - x_{k-1}).$$

Nous avons donc

$$T(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N) \leqslant T(x_1, ..., x_k, y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_N).$$

Soit z_N le plus petit des multiples entiers de x_1 qui soit supérieur ou égal à y_N et définissons $z_{k+1}, z_{k+2}, ..., z_N$ par:

$$c = z_{k+2} - z_{k+1} = z_{k+3} - z_{k+2} = ... = z_{N-1} - z_{N-2} = z_N - z_{N-1}$$
$$\text{et} \quad z_{k+1} = y_{k+1}.$$

Remarquons qu'il est impossible d'avoir $c > x_1$ car on aurait alors

$$z_N > y_{k+1} + x_1(N-k-1) = Nx_1 \geqslant y_{k+1} + (N-k-1)a = y_N.$$

a) Supposons $c = x_1$.

$$z_N < y_N + x_1 = x_N + x_1 + 2x_k - x_{k+1} - x_{k-1} < x_N + 2x_1,$$

donc

$$T(x_1, ..., x_k, z_{k+1}, ..., z_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + 2\left(\frac{x_1}{x_N}\right) \tag{6}$$

b) Supposons $c < x_1$.
Définissons $u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_{N-1}, u_N$ par

$$u_{k+1} = z_{k+1}, u_{N-1} = z_N, \quad u_{k+2} - u_{k+1} = u_{k+3} - u_{k+2}$$
$$= ... = u_N - u_{N-1} = d.$$

Il existe alors un entier l tel que $lx_1 = z_N - (k+1)x_1 = z_N - z_{k+1}$, donc

$$c = \frac{lx_1}{N-k-1} \quad \text{et} \quad d = \frac{lx_1}{N-k-2}. \tag{7}$$

Comme $c < x_1$, on a donc $d \leqslant x_1$, alors

$$\begin{aligned}
A &= T(x_1, ..., x_k, u_{k+1}, ..., u_{N-1}) - T(x_1, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_N)\\
&= -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1}\left(\frac{d}{u_{m+k+1}} - \frac{c}{z_{m+k+1}}\right)\\
&= -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{d(z_{k+1}+mc) - c(u_{k+1}+md)}{u_{m+k+1}z_{m+k+1}}\\
&= -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{(d-c)u_{k+1}}{u_{m+k+1}z_{m+k+1}},\\
A &> -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{(d-c)u_{k+1}}{u^2_{m+k+1}}.
\end{aligned}$$

En utilisant la méthode des trapèzes, on trouve:

$$A > -\frac{d}{u_N} + (d-c)u_{k+1}\left[\frac{1}{2u_{k+1}^2} + \frac{1}{2u_N^2}\right] + \int_{u_{k+1}}^{u_N} \frac{(d-c)u_{k+1}}{dx^2}\,dx\,,$$

$$A > -\frac{d}{u_N} + (d-c)u_{k+1}\left[\frac{1}{2u_{k+1}^2} + \frac{1}{2u_N^2}\right] + \left(\frac{d-c}{d}\right)u_{k+1}\left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_N}\right],$$

le dernier terme valant (par utilisation de (7)):

$$\frac{d-c}{d}u_{k+1}\frac{u_N - u_{k+1}}{u_{k+1}u_N} = \frac{1}{N-k-1}\cdot\frac{d(N-k-1)}{u_N} = \frac{d}{u_N}\,.$$

Donc

$$A > (d-c)u_{k+1}\left(\frac{1}{2u_{k+1}^2} + \frac{1}{2u_N^2}\right) > 0\,,$$

et

$$T(x_1, ..., x_k, z_{k+1}, ..., z_N) < T(x_1, ..., x_k, u_{k+1}, ..., u_{N-1})\,.$$

En répétant le procédé on trouve une suite $t_{k+1}, t_{k+2}, ..., t_{k+l}$ telle que

$$t_{k+2} - t_{k+1} = ... = t_{k+l} - t_{k+l-1} = x_1\,.$$

Nous sommes alors dans le cas a), donc (d'après (6))

$$T(x_1, x_2, ..., x_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + 2\left(\frac{x_1}{x_N}\right).$$

Deuxième cas: la suite $x_1, x_2 - x_1, ..., x_N - x_{N-1}$ est croissante. Alors d'après le lemme 4, il existe n tel que

$$x_1 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1} < x_{n+1} - x_n < x_{n+2} - x_{n+1} < ... < x_N - x_{N-1}\,.$$

Soit k tel que $n+1 \leqslant k \leqslant N-1$.

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(x_1, ..., x_k, ..., x_N) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}\right] = \frac{x_{k-1}}{x_k^2} - \frac{1}{x_{k+1}}\,.$$

Et si T est maximum on a donc $\dfrac{x_{k-1}}{x_k} = \dfrac{x_k}{x_{k+1}}$,

et donc $\dfrac{x_{N-1}}{x_N} = \dfrac{x_{N-2}}{x_{N-1}} = ... = \dfrac{x_{n+1}}{x_{n+2}} = \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \lambda < 1\,.$

Soit $A = \dfrac{x_N}{x_n}$, on a donc $\dfrac{1}{A} = \lambda^{(N-n)}$,

$$T(x_1, \dots, x_n, \dots, x_N) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + (N-n)(1-\lambda).$$

Notons $S_1 = (N-n)(1-\lambda) = -\dfrac{\mathrm{Log}A}{\mathrm{Log}\lambda} \cdot (1-\lambda)$ et dérivons S_1 en faisant varier λ (on suppose A fixe):

$$\frac{-S_1'}{\mathrm{Log}A} = \frac{-\mathrm{Log}\lambda - (1-\lambda)\lambda^{-1}}{(\mathrm{Log}\lambda)^2};$$

et comme $-\mathrm{Log}\lambda - \dfrac{1}{\lambda} + 1 < 0$ on a $S_1' > 0$.

D'autre part $\lambda = \dfrac{x_n}{x_{n+1}} \leqslant \dfrac{nx_1}{(n+1)x_1} = \dfrac{n}{n+1}$, donc

$$S_1 \leqslant -\frac{\mathrm{Log}A}{\mathrm{Log}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = -\frac{\mathrm{Log}A}{(n+1)\,\mathrm{Log}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)},$$

$$S_1 \leqslant \frac{\mathrm{Log}A}{(n+1)\left[\dfrac{1}{(n+1)} + \dfrac{1}{2(n+1)^2} + \dfrac{1}{3(n+1)^3} + \dots\right]} \leqslant \frac{\mathrm{Log}A}{1 + \dfrac{1}{2(n+1)}}$$
$$= \frac{2n+2}{2n+3}\,\mathrm{Log}A\,.$$

Soit $S_2 = \dfrac{1}{(n+1)} + \dfrac{1}{(n+2)} + \dots + \dfrac{1}{\left[\dfrac{x_N}{x_1}\right]}$, on a

$$S_2 + \frac{1}{n} > \mathrm{Log}\,\frac{1 + \left[\dfrac{x_N}{x_1}\right]}{n} \geqslant \mathrm{Log}\,\frac{x_N}{x_n} = \mathrm{Log}\,A\,.$$

Distinguons deux cas:

1) $\mathrm{Log}\,A \geqslant 5 \geqslant \dfrac{2n+3}{n}$. Alors

$$S_2 - S_1 \geqslant -\frac{1}{n} + \operatorname{Log} A - \operatorname{Log} A + \frac{1}{2n+3} \operatorname{Log} A \geqslant 0 .$$

donc $T(x_1, ..., x_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m}$.

2) $\operatorname{Log} A < 5$. Alors $A < e^5$, donc

$$S_2 > S_1 - \frac{1}{n} > S_1 - \frac{e^5}{\left(\frac{x_N}{x_1}\right)},$$

$$T(x_1, ..., x_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + e^5 \frac{x_1}{x_N}.$$

Lemme 6. *Soit* $(x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ *une suite réelle strictement croissante* s *et* t *deux entiers tels que* $s > t$,

$$T(..., x_{-1}, x_0, x_1, ...) = \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq s \quad r \neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2}.$$

Alors

$$T(..., x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, ..., x_{s-1}, x_s, x_{s+1}, ...) \leqslant \frac{\pi^2(\delta_s^{-1} + \delta_t^{-1})}{3(x_s - x_t)^2} - \frac{3(\delta_s + \delta_t)}{(x_s - x_t)^4}.$$

Définissons $(y_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ par

$$\begin{array}{lll} y_n = x_s + (n-s)\delta_s & \text{si} & n > s, \\ y_n = x_n & \text{si} & t \leqslant n \leqslant s, \\ y_n = x_t - (t-n)\delta_t & \text{si} & n < t. \end{array}$$

D'après (5) on a

$$T(..., y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, ..., y_s, y_{s+1}, ...) \geqslant T(..., x_{t-1}, x_t, ..., x_s, x_{s+1}, ...)$$

Il suffit de vérifier que l'inégalité du lemme est vérifiée pour la suite (y_m). Soit N tel que

$$(8) \qquad s - N < t \quad \text{et} \quad L = \left[\frac{y_s - y_{s-N}}{\delta_s}\right]$$

Remarquons que pour r, s, t distincts on a

$$\frac{1}{(y_r-y_s)^2}\,\frac{1}{(y_r-y_t)^2} = \left[\frac{1}{y_s-y_r}+\frac{1}{y_r-y_t}\right]^2 \frac{1}{(y_s-y_t)^2}$$

$$= \left[\frac{1}{(y_s-y_r)^2}+\frac{1}{(y_r-y_t)^2}\right]\frac{1}{(y_s-y_t)^2}+\frac{2}{(y_s-y_t)^3}\left[\frac{1}{y_s-y_r}+\frac{1}{y_r-y_t}\right].$$

On trouve que

$$S_N = \sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{(y_s-y_r)^2(y_r-y_t)^2}$$

$$= \sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{s+L} \left[\frac{\delta_r}{(y_s-y_t)^2}\left(\frac{1}{(y_r-y_s)^2}+\frac{1}{(y_r-y_t)^2}\right)+\frac{2\delta_r}{(y_s-y_t)^3}\left(\frac{1}{(y_r-y_t)}-\frac{1}{(y_r-y_s)}\right)\right].$$

Or, par application du lemme 5, on a:

$$-\sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{y_r-y_s} = \sum_{r=s-N}^{s-1}\frac{\delta_r}{y_s-y_r} - \frac{\delta_t}{y_s-y_t} - \sum_{r=s+1}^{s+L}\frac{\delta_r}{y_r-y_s}$$

$$< O\left(\frac{y_s-y_{s-1}}{y_s-y_{s-N}}\right) + \sum_{m\leqslant \frac{y_s-y_{s-N}}{y_s-y_{s-1}}}\frac{1}{m} - \sum_{m\leqslant L}\frac{1}{m} - \frac{\delta_t}{y_s-y_t}.$$

Comme $\left[\dfrac{y_s-y_{s-N}}{y_s-y_{s-1}}\right] \leqslant \left[\dfrac{y_s-y_{s-N}}{\delta_s}\right] = L$, on a donc

$$-\sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{y_r-y_s} < O\left(\frac{y_s-y_{s-1}}{y_s-y_{s-N}}\right) - \frac{\delta_t}{y_s-y_t}. \tag{9}$$

D'autre part

$$\sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{y_r-y_t} = \sum_{r=t+1}^{s+L}\frac{\delta_r}{y_r-y_t} - \sum_{r=t-1}^{s-N}\frac{\delta_r}{y_t-y_r} - \frac{\delta_s}{y_s-y_t}$$

$$\leqslant \frac{-\delta_s}{y_s-y_t} + O\left(\frac{y_{t+1}-y_t}{y_{s+L}-y_t}\right) + \sum_m{}'\frac{1}{m} - \sum_m{}''\frac{1}{m},$$

avec, pour $\sum'$: $1 \leqslant m \leqslant \dfrac{y_{s+L}-y_t}{y_{t+1}-y_t}$, et pour $\sum''$: $1 \leqslant m \leqslant N+t-s$,

en appliquant à nouveau le lemme 5 et remarquant que $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{s-N}$ sont équidistants. La différence entre les deux dernières sommes est (si elle n'est pas négative):

$$\sum_{N+t-s<m\leqslant\frac{y_{s+L}-y_t}{y_{t+1}-y_t}} \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{N+t-s}\left(\frac{y_{s+L}-y_t}{y_{t+1}-y_t}-(N+t-s)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{N+t-s}\left(\frac{L\delta_s+y_s-y_t}{\delta_t}-(N+t-s)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{N+t-s}\left(\frac{y_s-y_{s-N}+y_s-y_t}{\delta_t}-(N+t-s)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{N+t-s}\left(\frac{2y_s-2y_t}{\delta_t}\right) \tag{10}$$

en utilisant (8) et l'équidistance de $y_{t-1}, ..., y_{s-N}$. D'après (9) et (10) on a:

$$S_N \leqslant \sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\ r\neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{(y_s-y_t)^2}\left[\frac{1}{(y_r-y_s)^2}+\frac{1}{(y_r-y_t)^2}\right]-\frac{2(\delta_s+\delta_t)}{(y_s-y_t)^4}$$

$$+\frac{2}{(y_s-y_t)^3}\left[O\left(\frac{y_{t+1}-y_t}{y_{s+L}-y_t}\right)+O\left(\frac{y_s-y_{s-1}}{y_s-y_{s-N}}\right)+\frac{2(y_s-y_t)}{(N+t-s)\delta_t}\right].$$

Quand N tend vers l'infini le dernier crochet tend vers zéro, donc:

$$\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_r-y_s)^2(y_r-y_t)^2} \leqslant -\frac{2(\delta_s+\delta_t)}{(y_s-y_t)^4}$$

$$+\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_s-y_t)^2}\left[\frac{1}{(y_r-y_s)^2}+\frac{1}{(y_r-y_t)^2}\right].$$

D'après (3) on sait que

$$\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_r-y_s)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{3}\delta_s^{-1}-\frac{\delta_t}{(y_t-y_s)^2},$$

$$\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_r-y_t)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{3}\delta_t^{-1}-\frac{\delta_s}{(y_s-y_t)^2},$$ d'où le lemme.

PREUVE DU THÉORÈME.

Sans perte de généralité, on peut supposer

$$x_1 < x_2 < ... < x_R \quad \text{et} \quad \sum_{r=1}^{R} |u_r|^2 = 1 .$$

Notons $c_r = \sqrt{\delta_r}$ pour $r = 1, 2, ..., R$ et définissons la matrice M par:

$$\begin{cases} (M)_{r,s} = 0 & \text{si} \quad r = s\,, \\ (M)_{r,s} = \dfrac{c_r c_s}{x_r - x_s} & \text{si} \quad r \neq s\,. \end{cases}$$

La matrice iM est hermitienne, c'est pourquoi ses vecteurs propres sont orthogonaux et

$$\left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r c_s}{x_r - x_s} u_r \bar{u}_s \right|$$

est donc maximal si $(u_r)_{r=1}^R$ est un vecteur propre de M dont la valeur propre est maximale en valeur absolue. Admettons que c'est le cas et soit $i\,\mu$ la valeur propre (qui est donc purement imaginaire), on a donc

$$\mu^2 = \left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r c_s}{(x_r - x_s)} u_r \bar{u}_s \right|^2 \leqslant \Sigma\, |\, u_r \,|^2 \sum_r \left| \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \frac{c_r c_s}{(x_r - x_s)} \bar{u}_s \right|^2,$$

(à cause de l'inégalité de Cauchy)

$$\mu^2 \leqslant \sum_r \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \sum_{\substack{t \\ t \neq r}} \frac{c_r^2 c_s c_t \bar{u}_s u_t}{(x_r - x_s)(x_r - x_t)}.$$

Le membre de droite peut être partagé en deux parties selon que $s = t$ ou non, et remarquons que si $s \neq t$, on a

$$\frac{1}{(x_r - x_s)(x_r - x_t)} = \frac{1}{(x_s - x_t)} \left[\frac{1}{x_r - x_s} - \frac{1}{x_r - x_t} \right],$$

donc

$$\mu^2 \leqslant \sum_r \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \frac{\delta_r \delta_s \,|\, u_s \,|^2}{(x_r - x_s)^2} + \sum_{\substack{r,s,t \\ r \neq s, r \neq t \\ s \neq t}} \frac{c_r^2 c_s c_t}{x_s - x_t} \left[\frac{1}{x_r - x_s} - \frac{1}{x_r - x_t} \right] \bar{u}_s u_t\,.$$

D'après (3) on a

(11) $$\sum_s \sum_{\substack{r \\ r \neq s}} \frac{\delta_r \delta_s \,|\, u_s \,|^2}{(x_r - x_s)^2} \leqslant \sum_s \frac{\pi^2}{3} \,|\, u_s \,|^2 = \frac{\pi^2}{3}$$

et la seconde somme devient

$$S = \sum_{\substack{r,s,t \\ r \neq s, s \neq t}} \frac{c_r^2 c_s c_t \bar{u}_s u_t}{(x_s - x_t)(x_r - x_s)} + \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r^3 c_s \bar{u}_s u_r}{(x_s - x_r)^2}$$

$$- \sum_{\substack{r,s,t \\ r \neq t, s \neq t}} \frac{c_r^2 c_s c_t \bar{u}_s u_t}{(x_s - x_t)(x_r - x_t)} + \sum_{\substack{r,t \\ r \neq t}} \frac{c_r^3 c_t \bar{u}_r u_t}{(x_r - x_t)^2}.$$

Dans la première somme, on a: $\displaystyle\sum_{\substack{t \\ t \neq s}} \frac{c_s c_t u_t}{x_s - x_t} = i\mu u_s$,

et dans la troisième, on a: $\displaystyle\sum_{\substack{s \\ s \neq t}} \frac{c_s c_t \bar{u}_s}{(x_s - x_t)} = i\mu \bar{u}_t$,

d'où

$$S = 2 \operatorname{Re} \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r^3 c_s \bar{u}_s u_r}{(x_s - x_r)^2},$$

$$\frac{S}{2} \leqslant U = \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r^3 c_s \mid u_s \mid \mid u_r \mid}{(x_s - x_r)^2}. \tag{12}$$

D'après l'inégalité de Cauchy, on a:

$$U^2 \leqslant \sum_r \mid u_r \mid^2 \cdot \sum_r \left| \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \frac{c_r c_s^3 \mid u_s \mid}{(x_r - x_s)^2} \right|^2,$$

$$U^2 \leqslant \sum_r \sum_{\substack{s,t \\ s \neq r \\ t \neq r}} \frac{c_r^2 c_s^3 c_t^3 \mid u_s \mid \mid u_t \mid}{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2},$$

$$U^2 \leqslant \sum_r \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \frac{\delta_r \delta_s^3 \mid u_s \mid^2}{(x_r - x_s)^4} + \sum_{\substack{r,s,t \\ r \neq s, r \neq t \\ s \neq t}} \frac{c_r^2 c_s^3 c_t^3 \mid u_s \mid \mid u_t \mid}{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2}.$$

Par application de (4) et du lemme 6, on trouve:

$$U^2 \leqslant 2 \cdot \frac{\pi^4}{90} + \sum_{\substack{s,t \\ s \neq t}} \frac{\pi^2}{3} c_s^3 c_t^3 (\delta_s^{-1} + \delta_t^{-1}) \frac{\mid u_s \mid \mid u_t \mid}{(x_s - x_t)^2},$$

$$U^2 \leqslant \frac{\pi^4}{45} + \frac{2\pi^2}{3} U,$$

$$\left(U - \frac{\pi^2}{3} \right)^2 \leqslant \frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^4}{9},$$

$$U \leqslant \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}\,.$$

De (11) et (12) on déduit

$$\mu^2 \leqslant \frac{\pi^2}{3} + 2\left[\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}\right],$$

$$\mu \leqslant \sqrt{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}}\,\pi < \frac{4}{3}\pi\,.$$

Le point faible de la démonstration est sans doute la non utilisation du terme $-\frac{3(\delta_s+\delta_t)}{(x_s-x_t)^4}$ du lemme 6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBAN, M. B. The "density" of the zeros of Dirichlet L-series and the problem of the sum of primes and "near primes". *Math. Sb. 61 (103)* (1963), 418-425.

[2] BOMBIERI, E. *Le grand crible dans la théorie analytique des nombres.* Astérisque 18, S.M.F. (1974).

[3] HALBERSTAM, H. and H. E. RICHERT. *Sieve Methods.* Academic Press, Londres (1974).

[4] MONTGOMERY, H. L. *Topics in multiplicative number theory.* Lecture Notes in Math., vol. 227, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[5] —— The analytic principle of the large sieve. *Bull. of the Am. Math. Soc. 84 (4)* (1978), 73-81.

[6] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. The large sieve. *Mathematika 20* (1973), 119-134.

[7] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. Hilbert's inequality. *J. London Math. Soc. (2), 8* (1974), 73-81.

(Reçu le 24 juin 1983)

Emmanuel Preissmann

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne
CH-1015 Lausanne/Dorigny

vide-leer-empty