Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1984)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN
Autor: Preissmann, E.
Kapitel: inégalités de grand crible et leurs applications
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53823

L'Enseignement Mathématique, t. 30 (1984), p. 95-113

SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN

par E. PREISSMANN

LES INÉGALITÉS DE GRAND CRIBLE ET LEURS APPLICATIONS

Le grand crible est une idée relativement récente, permettant par exemple de démontrer le théorème de Bombieri-Vinogradov [2] ou de montrer que pour n assez grand on a $2n = p + P_k$ (p étant premier et P_k produit de k facteurs premiers au plus). Barban [1] a trouvé $k = 4$, et Chen (voir [3]) $k = 2$.

Notons $e(\theta) = e^{2i\pi\theta}$ et soient $a_{M+1}, a_{M+2}, \ldots, a_{M+N}$ des nombres complexes arbitraires. Posons

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha) .$$

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_R$ des nombres réels distincts modulo 1 et posons

$$\delta = \underset{\substack{r,s,n\in\mathbf{Z}\\ r\neq s}}{\mathrm{Min}} \mid \alpha_r - \alpha_s - n \mid .$$

Une inégalité de grand crible est du type

$$\text{(A)} \qquad \sum_r \mid S(\alpha_r) \mid^2 \leqslant C(N, \delta) \sum_n \mid a_n \mid^2$$

(vérifiée pour (a_n) et (α_r) arbitraires).
Si $R = 1$, on trouve $\mid S(\alpha_1) \mid^2 \leqslant N \cdot \Sigma \mid a_n \mid^2$ (inégalité de Schwarz) et si $N = 1$, $\sum_r \mid S(\alpha_r) \mid^2 = R \cdot \mid a_{M+1} \mid^2 \leqslant \delta^{-1} \mid a_{M+1} \mid^2$.

On a trouvé diverses expressions de $C(N, \delta)$ [4] mais il est surprenant qu'on ait pu réunir les deux inégalités précédentes et montrer que $C(N, \delta) = N + \delta^{-1} - 1$ satisfait (A) [5]. Cette expression est la meilleure possible au sens suivant: pour R donné, on peut toujours obtenir l'égalité dans (A) [5].
On peut obtenir une forme un peu plus sophistiquée que (1):
Si $\delta_r = \underset{s\neq r,\, n\in\mathbf{Z}}{\mathrm{Min}} \mid \alpha_r - \alpha_s - n \mid$, alors Montgomery-Vaughan [6] [7] ont montré que

(B) $$\sum_{r=1}^{R} | S(\alpha_r) |^2 (N + C\delta_r^{-1})^{-1} \leqslant \Sigma | a_n |^2$$

avec $C = \frac{3}{2}$, inégalité dont ils donnent des applications arithmétiques.

Les inégalités de Hilbert-Montgomery-Vaughan

L'inégalité (A) équivaut à dire que la norme de la matrice $R \times N \left(e(n\alpha_r)\right)$ est inférieure ou égale à $\sqrt{C(N, \delta)}$. La matrice transposée ayant la même norme, on est conduit [6] à s'intéresser à la majoration de la norme d'une matrice du type $\left(\sin^{-1}\pi(\alpha_r - \alpha_s)\right)'$ (le prime signifiant que les termes de la grande diagonale sont nuls). Cette majoration se ramène à celle de la norme d'une matrice du type $\left((x_r - x_s)^{-1}\right)'$ [5]. C'est pourquoi Montgomery et Vaughan [7] ont démontré:

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_r$ des nombres réels distincts,

$$\delta = \operatorname*{Min}_{\substack{r,s \\ r \neq s}} | x_r - x_s |, \qquad \delta_r = \operatorname*{Min}_{s \neq r} | x_r - x_s |$$

alors quels que soient les nombres complexes $u_1, u_2, \ldots, u_R$

(C) $$\left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leqslant \pi\delta^{-1}\Sigma | u_r |,$$

(D) $$\left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leqslant \pi C \cdot \Sigma | u_r |^2 \delta_r^{-1},$$

avec $C = \frac{3}{2}$.

De (C) on déduit (A) avec $C(N, \delta) = N + \delta^{-1}$, et de (D) on déduit (B). Un conjecture vraisemblable est qu'on peut donner à C la valeur 1 dans (D).

Dans ce sens, j'ai montré le résultat suivant:

Théorème. (D) *reste vraie pour* $C = \frac{4}{3}$.

Notation: Tout au long de la démonstration $\delta_r = \operatorname*{Min}_{\substack{s \\ s \neq r}} | x_r - x_s |$.

Lemme 1. *Soit* $(x_r)_0^\infty$ *une suite réelle strictement croissante telle que* $x_0 = 0$; f *une fonction de* $]0, +\infty[$ *dans* $\mathbf{R}$, *intégrable à l'infini, trois fois dérivable et vérifiant* $f'(x) < 0, f''(x) > 0, f'''(x) < 0$ *pour tout* x. *Alors*