Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 30 (1984)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE INÉGALITÉ DE MONTGOMERY-VAUGHAN
Autor: Preissmann, E.
Kapitel: inégalités de Hilbert-Montgomery-Vaughan
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53823

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

$$\text{(B)} \qquad \sum_{r=1}^{R} |S(\alpha_r)|^2 (N + C\delta_r^{-1})^{-1} \leqslant \Sigma |a_n|^2$$

avec $C = \frac{3}{2}$, inégalité dont ils donnent des applications arithmétiques.

Les inégalités de Hilbert-Montgomery-Vaughan

L'inégalité (A) équivaut à dire que la norme de la matrice $R \times N\left(e(n\alpha_r)\right)$ est inférieure ou égale à $\sqrt{C(N, \delta)}$. La matrice transposée ayant la même norme, on est conduit [6] à s'intéresser à la majoration de la norme d'une matrice du type $\left(\sin^{-1}\pi(\alpha_r - \alpha_s)\right)'$ (le prime signifiant que les termes de la grande diagonale sont nuls). Cette majoration se ramène à celle de la norme d'une matrice du type $\left((x_r - x_s)^{-1}\right)'$ [5]. C'est pourquoi Montgomery et Vaughan [7] ont démontré:

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_r$ des nombres réels distincts,

$$\delta = \operatorname*{Min}_{\substack{r,s \\ r \neq s}} |x_r - x_s|, \qquad \delta_r = \operatorname*{Min}_{s \neq r} |x_r - x_s|$$

alors quels que soient les nombres complexes $u_1, u_2, \ldots, u_R$

$$\text{(C)} \qquad \left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leqslant \pi\delta^{-1}\Sigma |u_r|,$$

$$\text{(D)} \qquad \left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{\bar{u}_r u_s}{x_r - x_s} \right| \leqslant \pi C \cdot \Sigma |u_r|^2 \delta_r^{-1},$$

avec $C = \frac{3}{2}$.

De (C) on déduit (A) avec $C(N, \delta) = N + \delta^{-1}$, et de (D) on déduit (B). Un conjecture vraisemblable est qu'on peut donner à C la valeur 1 dans (D).

Dans ce sens, j'ai montré le résultat suivant:

THÉORÈME. (D) *reste vraie pour* $C = \frac{4}{3}$.

Notation: Tout au long de la démonstration $\delta_r = \operatorname*{Min}_{\substack{s \\ s \neq r}} |x_r - x_s|$.

LEMME 1. *Soit* $(x_r)_0^\infty$ *une suite réelle strictement croissante telle que* $x_0 = 0$; f *une fonction de* $]0, +\infty[$ *dans* $\mathbf{R}$, *intégrable à l'infini, trois fois dérivable et vérifiant* $f'(x) < 0, f''(x) > 0, f'''(x) < 0$ *pour tout* x. *Alors*

$$T(x_1, x_2, ..., x_n ...) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\delta_k$$

considéré comme fonction de $x_2, x_3, ..., x_n, ...$ *est maximum pour* $x_k = kx_1$ *pour tout* k.

D'après les conditions précédentes, il est clair que $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ et que f et $-f'$ sont des fonctions convexes. Notons

$$a_k = x_k - \frac{1}{2}\delta_k \quad \text{et} \quad b_k = x_k + \frac{1}{2}\delta_k .$$

On a donc

$$\delta_k f(x_k) < \int_{a_k}^{b_k} f(x)dx \quad \text{pour tout } k . \tag{1}$$

D'après la définition de δ_k on sait que les intervalles $]a_k, b_k[$ sont disjoints, et donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)\delta_k < \int_{a_1}^{+\infty} f(x)dx , \tag{2}$$

d'où la convergence de la série définissant T.

(a) Supposons qu'on ait une suite telle que

$$x_1 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant x_3 - x_2 ... \leqslant x_n - x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n - x_{n-1} > x_{n+1} - x_n .$$

Alors:

$$\begin{aligned} D &= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}+\lambda, x_{n+2}+\lambda, x_{n+3}+\lambda, ...) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{k=1}^{n-1} \delta_k f(x_k) + (x_{n+1}+\lambda-x_n)f(x_n) + \sum_{n+2}^{\infty} \delta_k f(x_k+\lambda) \right. \\ &\qquad \left. + \delta_{n+1}(\lambda) f(x_{n+1}+\lambda)\right] \\ &= f(x_n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k f'(x_k) + \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} (\delta_{n+1}(\lambda)) , \end{aligned}$$

où $\delta_{n+1}(\lambda) = \operatorname{Inf}[(x_{n+1}-x_n+\lambda), (x_{n+2}-x_{n+1})]$.
Comme $-f'$ est convexe, on trouve de manière similaire à (2):

$$-\sum_{k=n+1}^{\infty} f'(x_k)\delta_k < -\int_{a_{n+1}}^{\infty} f'(x)dx \quad \text{d'où} \quad D > f(x_n) - f(a_{n+1}) > 0 .$$

C'est pourquoi (en notant $h = [(x_n - x_{n-1}) - (x_{n+1} - x_n)]$) on a

$$T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...) < T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} + h, x_{n+2} + h, ...).$$

(b) Supposons maintenant qu'on ait une suite telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = x_{n+3} - x_{n+2} = ... \quad \text{et} \quad x_n - x_{n-1} < a.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} - \lambda, x_{n+2} - \lambda, ...)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\delta_k + (a-\lambda)f(x_{n+1} - \lambda) + \sum_{k=n+2}^{\infty} f(x_k - \lambda)\delta_k\right]$$

$$= -f(x_{n+1}) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \delta_k f'(x_k) > -f(x_{n+1}) - \int_{x_{n+1}}^{+\infty} f'(x)dx = 0.$$

Notons $h = a - (x_n - x_{n-1})$; on a donc

$$T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, ...) < T(x_1, ..., x_n, x_{n+1} - h, x_{n+2} - h, ...),$$

et en répétant indéfiniment ce décalage on trouve (en notant $k = x_n - x_{n-1}$)

$$T(x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1} ...) < T(x_1, ..., x_{n-1}, x_{n-1} + k, x_{n-1} + 2k, ...).$$

(c) M étant la borne supérieure de $T(x_1, ..., x_n, ...)$, on peut supposer $T(x_1, ..., x_n, ...) > M - \varepsilon$ et par une application répétée de a) on sait que pour tout m on peut trouver une suite (y_n) telle que

$$x_1 = y_1 \leqslant y_2 - y_1 \leqslant ... \leqslant y_{m+1} - y_m \quad \text{et} \quad T(y_1, ..., y_n, ...) > T(x_1, ... x_n, ...).$$

D'autre part

$$R_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f(y_k)\delta_k < \int_{a_{m+1}}^{\infty} f(x)dx$$

est plus petit que ε pour m assez grand, donc (en notant $l = (y_{m+1} - y_m)$)

$$T(x_1, y_2, ..., y_m, y_{m+1} + l, y_{m+1} + 2l, ...) > M - \varepsilon - R_m > M - 2\varepsilon,$$

et en appliquant b) de manière répétée on trouve

$$T(x_1, 2x_1, 3x_1, ..., kx_1, ...) > M - 2\varepsilon$$

pour tout ε, d'où le lemme.

Conséquences: on a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{x_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1}{k^2 x_1^2} = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{\pi^2}{6}, \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{x_k^4} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1}{k^4 x_1^4} = \frac{1}{x_1^3} \cdot \frac{\pi^4}{90}, \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta_k}{x_k^2(x_k+a)^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_1}{(kx_1)^2(kx_1+a)^2}, \quad a > 0, \tag{5}$$

$$\text{avec} \quad f(x) = \frac{1}{x^2};\ \frac{1}{x^4};\ \frac{1}{x^2(x+a)^2}.$$

LEMME 2. *Soit* $(x_n)_{n=0}^N$ *une suite réelle strictement croissante,* $x_0 = 0$, *telle que* (x_1 *et* x_N *étant fixés*)

$$T(x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k}{x_k}$$

soit maximum pour $x_2, x_3, ..., x_{N-1}$ *variables. Alors la suite* $x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, ..., x_N - x_{N-1}$ *est monotone.*

(a) Supposons que la suite est telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = ... = x_{n+k} - x_{n+k-1},$$
$$x_n - x_{n-1} > a, \quad x_{n+k+1} - x_{n+k} > a.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1}+\lambda, ..., x_{n+l}+l\lambda, x_{n+k}+k\lambda, x_{n+k+1}, ..., x_N)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{r=1}^{n-1} \frac{\delta_m}{x_m} + \sum_{l=0}^{k} \frac{a+\lambda}{x_{n+l}+l\lambda} + \frac{\delta_{n+k+1}(\lambda)}{x_{n+k+1}} + \sum_{m=n+k+2}^{N} \frac{\delta_m}{x_m}\right].$$

Si on remarque que $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \delta_{n+k+1}(\lambda) = 0$ ou $-k$ et que

$$\frac{a+\lambda}{x_{n+l}+l\lambda} = \frac{1}{l} \frac{x_{n+l} - x_n + l\lambda}{x_{n+l}+l\lambda},$$

on trouve

$$D \geqslant \sum_{l=0}^{k} \frac{x_n}{x_{n+l}^2} - \frac{k}{x_{n+k+1}} > x_n \sum_{l=0}^{k} \frac{1}{x_{n+l}^2} - \frac{x_n}{a}\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+k}}\right),$$
$$D > \frac{x_n}{a}\left(a \sum \frac{1}{x_{n+l}^2} - \int_{x_n}^{x_{n+k}} \frac{dx}{x^2}\right) > 0.$$

Donc la fonction T n'est pas maximisée par cette suite.

(b) Supposons maintenant que la suite est telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = \dots x_{n+k} - x_{n+k-1},$$
$$a > x_n - x_{n-1}, \quad a > x_{n+k+1} - x_{n+k}.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}-\lambda, x_{n+2}-\lambda, \dots, x_{n+k}-\lambda, x_{n+k+1}, \dots, x_N),$$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\sum_{m=1}^{n} \frac{\delta_m}{x_m} + \frac{a-\lambda}{x_{n+1}-\lambda} + \frac{a}{x_{n+2}-\lambda} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}-\lambda}\right.$$
$$\left. + \frac{x_{n+k+1} - x_{n+k} + \lambda}{x_{n+k}-\lambda} + \frac{\delta_{n+k+1}}{x_{n+k+1}} + \sum_{m=n+k+2}^{N} \frac{\delta_m}{x_m}\right.$$

En tenant compte du fait que $\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \delta_{n+k+1}(\lambda) = 0$ ou 1 et en utilisant la méthode des trapèzes on trouve

$$D \geqslant \frac{-x_n}{x_{n+1}^2} + \frac{a}{x_{n+2}^2} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}^2} + \frac{x_{n+k+1}}{x_{n+k}^2},$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+1}^2} + \frac{a}{x_{n+2}^2} + \dots + \frac{a}{x_{n+k-1}^2} + \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+k}^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+k}^2} + \frac{1}{x_{n+k}}$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+1}^2} + \int_{x_{n+1}}^{x_{n+k}} \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+k}^2} + \frac{1}{x_{n+k}},$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{2}\frac{a}{x_{n+k}^2} = \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}^2} - \frac{a}{2x_{n+1}^2} - \frac{a}{2x_{n+k}^2},$$

$$D > \frac{a}{2x_{n+1}^2} - \frac{a}{2x_{n+k}^2} \geqslant 0,$$

Donc la suite ne maximisait pas la fonction T.

De a) et b) on déduit que la suite maximisante est telle que

$$x_1, (x_2 - x_1), \dots, (x_n - x_{n-1}), \dots, (x_N - x_{N-1})$$

est monotone.

LEMME 3. *Soit* $(x_n)_0^N$ *une suite réelle strictement croissante telle que* $x_0 = 0$ *et que* (x_1 *et* x_N *étant fixés*)

$$T(x_1, ..., x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k}{x_k}$$

est maximum $(x_2, x_3, ..., x_{N-1}$ *étant les variables). Si la suite*

$$x_1, (x_2 - x_1), (x_3 - x_2), ..., (x_N - x_{N-1})$$

est décroissante, alors il existe un k *tel que*

$$x_1 = x_2 - x_1 = ... = x_k - x_{k-1} \geqslant x_{k+1} - x_k \geqslant x_{k+2} - x_{k+1} = ..$$
$$= x_N - x_{N-1}.$$

a) Supposons que la suite soit telle que

$$x_{n-1} - x_{n-2} > x_n - x_{n-1} \geqslant x_{n+1} - x_n > x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Alors

$$D = \frac{\partial}{\partial x_n} T(x_1, ..., x_{n-1}, x_n, x_{n+1} ..., x_N) \quad \text{(dérivée à droite)},$$

$$D = \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} + \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n} \right] = \frac{x_n^2 - x_{n+1}x_{n-1}}{x_n^2 x_{n-1}}.$$

$$D \geqslant \frac{x_n^2 - x_{n-1}(x_n + (x_n - x_{n-1}))}{x_n^2 x_{n-1}} = \frac{(x_n - x_{n-1})^2}{x_n^2 x_{n-1}} > 0.$$

donc la suite ne maximise pas la fonction T.

b) Supposons que la suite soit telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = x_{n+2} - x_{n+1} = ... = x_{n+k} - x_{n+k-1} \quad (k \geqslant 2),$$
$$a > x_{n+k+1} - x_{n+k}, \quad a < x_n - x_{n-1}.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} + (k-1)\lambda, ..., x_{n+k-2} + 2\lambda, x_{n+k-1} + \lambda, x_{n+k}, ..., x_N),$$

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{n+1} - x_n + (k-1)\lambda}{x_n} + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{x_{n+l+1} - x_{n+l} - \lambda}{x_{n+l} + (k-l)\lambda} + \frac{x_{n+k+1} - x_{n+k}}{x_{n+k}} \right].$$

Notons $a_t = x_t - \frac{a}{2}$ $b_t = x_t + \frac{a}{2}$ et remarquons que

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left(\frac{x_{n+l+1} - x_{n+l} - \lambda}{x_{n+l} + (k-l)\lambda} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{1}{k-l} \frac{x_{n+k} - x_{n+l} - (k-l)\lambda}{x_{n+l} + (k-l)\lambda} \right] = -\frac{x_{n+k}}{x_{n+l}^2},$$

$$D = \frac{k-1}{x_n} - \sum_{l=1}^{k-1} \frac{x_{n+k}}{x_{n+l}^2},$$

et que $\dfrac{a}{x_{n+l}^2} < \displaystyle\int_{a_{n+l}}^{b_{n+l}} \frac{dx}{x^2}$.

$$D > \frac{k-1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{a} \int_{a_{n+1}}^{b_{n+k-1}} \frac{dx}{x^2} = \frac{k-1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{a}\left[\frac{1}{b_n} - \frac{1}{a_{n+k}}\right],$$

$$D > \frac{k-1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{a}\left[\frac{(x_{n+k} - x_n - a)}{b_n\, a_{n+k}}\right] = (k-1)\left[\frac{1}{x_n} - \frac{x_{n+k}}{b_n\, a_{n+k}}\right],$$

$$D > \frac{k-1}{x_n\, b_n\, a_{n+k}} \cdot \left[b_n\, a_{n+k} - x_n\, x_{n+k}\right],$$

$$D > \frac{k-1}{x_n\, b_n\, a_{n+k}} \cdot \frac{a}{2}\left[x_{n+k} - x_n - \frac{a}{2}\right] > 0,$$

donc la suite ne maximise pas la fonction T.

De a) et b) on déduit que les inégalités strictes dans la suite

$$x_1 \leqslant x_2 - x_1 \leqslant x_3 - x_2 \ldots \leqslant x_N - x_{N-1}$$

ne peuvent être que consécutives.

LEMME 4. *Soit* $(x_n)_0^N$ *une suite réelle strictement croissante,* $x_0 = 0$, *et maximisant la fonction*

$$T(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k}{x_k},$$

($x_2, x_3, \ldots, x_{N-1}$ *étant les variables). Si*

$$x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, x_N - x_{N-1}$$

est une suite croissante, alors il existe un nombre n *tel que*

$$x_1 = x_2 - x_1 = \ldots = x_n - x_{n-1} < x_{n+1} - x_n < \ldots < x_N - x_{N-1}.$$

a) Supposons que la suite soit telle que

$$a = x_{n+1} - x_n = \ldots = x_{n+k} - x_{n+k-1}, \qquad (k \geqslant 2),$$

$$a > x_n - x_{n-1}, \quad a < x_{n+k+1} - x_{n+k}.$$

Alors

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}-\lambda, ..., x_{n+k-1}-\lambda, x_{n+k}, ..., x_N)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{n+1}-x_n-\lambda}{x_{n+1}-\lambda} + \frac{a}{x_{n+2}-\lambda} + ... + \frac{a}{x_{n+k-1}-\lambda} + \frac{a+\lambda}{x_{n+k}}\right]$$

$$= -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} + \frac{a}{x_{n+2}^2} + ... + \frac{a}{x_{n+k-1}^2} + \frac{1}{x_{n+k}},$$

$$D > -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} + \int_{x_{n+2}}^{x_{n+k}} \frac{dx}{x^2} + \frac{1}{x_{n+k}} = -\frac{x_n}{x_{n+1}^2} + \frac{1}{x_{n+2}} = \frac{a^2}{x_{n+1}^2 x_{n+2}} > 0.$$

Donc cette suite ne peut maximiser T.

b) Supposons que la suite soit telle que

$$< x_2 - x_1 < ... < x_k - x_{k-1} < x_{k+1} - x_k = x_{k+2} - x_{k+1} = ... = x_N - x_{N-1} = a.$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}-(N-k-1)\lambda, x_{k+2}-(N-k-2)\lambda, ..., x_{N-1}-\lambda, x_N)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{k+1}-x_k-(N-k-1)\lambda}{x_{k+1}-(N-k-1)\lambda} + \frac{a+\lambda}{x_{k+2}-(N-k-2)\lambda} + ... + \frac{a+\lambda}{x_{N-1}-\lambda} + \frac{a+\lambda}{x_N}\right],$$

et comme

$$\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{a+\lambda}{x_{k+l}-(N-k-l)\lambda}\right] = \frac{1}{N-k-l}\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_N-x_{k+l}+(N-k-l)\lambda}{x_{k+l}-(N-k-2)\lambda}\right] = \frac{x_N}{x_{k+l}^2}.$$

on trouve

$$D = \frac{-x_k(N-k-1)}{x_{k+1}^2} + \frac{x_N}{x_{k+2}^2} + ... + \frac{x_N}{x_{k+l}^2} + ... + \frac{x_N}{x_N^2},$$

d'où (par utilisation de la formule des trapèzes)

$$D > \frac{-x_k(N-k-1)}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2}\frac{x_N}{x_N^2} + \int_{x_{k+1}}^{x_N} \frac{dx}{x^2}\cdot\frac{x_N}{a},$$

$$D > \frac{-x_k(N-k-1)}{x_{k+1}^2} - \frac{1}{2}\frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2}\frac{x_N}{x_N^2} + \frac{x_N}{a}\left(\frac{1}{x_{k+1}} - \frac{1}{x_N}\right),$$

$$D > -\frac{1}{2}\frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2x_N} + \frac{x_N x_{k+1} - x_{k+1}^2 - x_k(x_N - x_{k+1})}{a x_{k+1}^2}.$$

$$D > -\frac{1}{2}\frac{x_N}{x_{k+1}^2} + \frac{1}{2x_N} + \frac{x_N a - a x_{k+1}}{a x_{k+1}^2},$$

$$D > \frac{1}{2x_N} + \frac{-x_N + 2x_N - 2x_{k+1}}{2x_{k+1}^2},$$

$$D > \frac{x_{k+1}^2 + x_N^2 - 2x_{k+1}x_N}{2x_N x_{k+1}^2} = \frac{(x_N - x_{k+1})^2}{2x_N x_{k+1}^2} \geqslant 0.$$

donc la suite ne maximise pas T.

De a) et b) on déduit le lemme.

LEMME 5. *Soit* $(x_n)_0^N$ *une suite réelle croissante,* $x_0 = 0$, *maximisant*

$$T(x_1, x_2, ..., x_{N-1}, x_N) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\delta_k}{x_k}$$

$(x_2, ..., x_{N-1}$ *étant les variables).*

Alors $T(x_1, ..., x_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + O\left(\frac{x_1}{x_N}\right).$

D'après le lemme 2 on voit qu'il y a deux cas.

Premier cas: La suite $x_1, x_2 - x_1, ..., x_N - x_{N-1}$ est décroissante. D'après le lemme 3, on a:

$$x_1 = x_2 - x_1 = ... = x_k - x_{k-1} > x_{k+1} - x_k \geqslant x_{k+2} - x_{k+1}$$
$$= x_{k+3} - x_{k+2} ... = x_N - x_{N-1} = a,$$

d'où

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} T(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}+\lambda, x_{k+2}+\lambda, ..., x_{N-1}+\lambda, x_N+\lambda)$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)_{\lambda=0^+} \left[\frac{x_{k+1} - x_k + \lambda}{x_k} + \frac{a}{x_{k+1}+\lambda} + ... + \frac{a}{x_N+\lambda}\right]$$
$$= \frac{1}{x_k} - a\left(\frac{1}{x_{k+1}^2} + ... + \frac{1}{x_N^2}\right),$$

$$D > \frac{1}{x_k} - \int_{x_{k+1}-a}^{x_N} \frac{dx}{x^2} > \frac{1}{x_k} - \int_{x_k}^{x_N} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{x_N} > 0.$$

Soit

$$y_{k+1} = x_{k+1} + (2x_k - x_{k+1} - x_{k-1})$$
$$y_{k+2} = x_{k+2} + (2x_k - x_{k+1} - x_{k-1})$$
$$\vdots$$
$$y_N = x_N + (2x_k - x_{k+1} - x_{k-1}).$$

Nous avons donc

$$T(x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_N) \leqslant T(x_1, ..., x_k, y_{k+1}, y_{k+2}, ..., y_N).$$

Soit z_N le plus petit des multiples entiers de x_1 qui soit supérieur ou égal à y_N et définissons $z_{k+1}, z_{k+2}, ..., z_N$ par:

$$c = z_{k+2} - z_{k+1} = z_{k+3} - z_{k+2} = ... = z_{N-1} - z_{N-2} = z_N - z_{N-1}$$
$$\text{et} \quad z_{k+1} = y_{k+1}.$$

Remarquons qu'il est impossible d'avoir $c > x_1$ car on aurait alors

$$z_N > y_{k+1} + x_1(N-k-1) = Nx_1 \geqslant y_{k+1} + (N-k-1)a = y_N.$$

a) Supposons $c = x_1$.

$$z_N < y_N + x_1 = x_N + x_1 + 2x_k - x_{k+1} - x_{k-1} < x_N + 2x_1,$$

donc

$$T(x_1, ..., x_k, z_{k+1}, ..., z_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + 2\left(\frac{x_1}{x_N}\right) \tag{6}$$

b) Supposons $c < x_1$.
Définissons $u_{k+1}, u_{k+2}, ..., u_{N-1}, u_N$ par

$$u_{k+1} = z_{k+1}, u_{N-1} = z_N, \quad u_{k+2} - u_{k+1} = u_{k+3} - u_{k+2}$$
$$= ... = u_N - u_{N-1} = d.$$

Il existe alors un entier l tel que $lx_1 = z_N - (k+1)x_1 = z_N - z_{k+1}$, donc

$$c = \frac{lx_1}{N-k-1} \quad \text{et} \quad d = \frac{lx_1}{N-k-2}. \tag{7}$$

Comme $c < x_1$, on a donc $d \leqslant x_1$, alors

$$\begin{aligned}
A &= T(x_1, ..., x_k, u_{k+1}, ..., u_{N-1}) - T(x_1, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_N) \\
&= -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \left(\frac{d}{u_{m+k+1}} - \frac{c}{z_{m+k+1}}\right) \\
&= -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{d(z_{k+1}+mc) - c(u_{k+1}+md)}{u_{m+k+1}z_{m+k+1}} \\
&= -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{(d-c)u_{k+1}}{u_{m+k+1}z_{m+k+1}},
\end{aligned}$$

$$A > -\frac{d}{u_N} + \sum_{m=0}^{N-k-1} \frac{(d-c)u_{k+1}}{u_{m+k+1}^2}.$$

En utilisant la méthode des trapèzes, on trouve:

$$A > -\frac{d}{u_N} + (d-c)u_{k+1}\left[\frac{1}{2u_{k+1}^2} + \frac{1}{2u_N^2}\right] + \int_{u_{k+1}}^{u_N} \frac{(d-c)u_{k+1}}{dx^2}\,dx\,,$$

$$A > -\frac{d}{u_N} + (d-c)u_{k+1}\left[\frac{1}{2u_{k+1}^2} + \frac{1}{2u_N^2}\right] + \left(\frac{d-c}{d}\right)u_{k+1}\left[\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_N}\right],$$

le dernier terme valant (par utilisation de (7)):

$$\frac{d-c}{d}\,u_{k+1}\,\frac{u_N - u_{k+1}}{u_{k+1}u_N} = \frac{1}{N-k-1}\cdot\frac{d(N-k-1)}{u_N} = \frac{d}{u_N}\,.$$

Donc

$$A > (d-c)u_{k+1}\left(\frac{1}{2u_{k+1}^2} + \frac{1}{2u_N^2}\right) > 0\,,$$

et

$$T(x_1, ..., x_k, z_{k+1}, ..., z_N) < T(x_1, ..., x_k, u_{k+1}, ..., u_{N-1})\,.$$

En répétant le procédé on trouve une suite $t_{k+1}, t_{k+2}, ..., t_{k+l}$ telle que

$$t_{k+2} - t_{k+1} = ... = t_{k+l} - t_{k+l-1} = x_1\,.$$

Nous sommes alors dans le cas a), donc (d'après (6))

$$T(x_1, x_2, ..., x_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + 2\left(\frac{x_1}{x_N}\right).$$

Deuxième cas: la suite $x_1, x_2 - x_1, ..., x_N - x_{N-1}$ est croissante. Alors d'après le lemme 4, il existe n tel que

$$x_1 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1} < x_{n+1} - x_n < x_{n+2} - x_{n+1}$$
$$< ... < x_N - x_{N-1}\,.$$

Soit k tel que $n + 1 \leqslant k \leqslant N - 1$.

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(x_1, ..., x_k, ..., x_N) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{x_k - x_{k-1}}{x_k} + \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}}\right] = \frac{x_{k-1}}{x_k^2} - \frac{1}{x_{k+1}}\,.$$

Et si T est maximum on a donc $\dfrac{x_{k-1}}{x_k} = \dfrac{x_k}{x_{k+1}}$,

et donc $\dfrac{x_{N-1}}{x_N} = \dfrac{x_{N-2}}{x_{N-1}} = ... = \dfrac{x_{n+1}}{x_{n+2}} = \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \lambda < 1\,.$

Soit $A = \dfrac{x_N}{x_n}$, on a donc $\dfrac{1}{A} = \lambda^{(N-n)}$,

$$T(x_1, ..., x_n, ..., x_N) = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} + (N-n)(1-\lambda).$$

Notons $S_1 = (N-n)(1-\lambda) = -\dfrac{\mathrm{Log}A}{\mathrm{Log}\lambda}\cdot(1-\lambda)$ et dérivons S_1 en faisant varier λ (on suppose A fixe):

$$\frac{-S'_1}{\mathrm{Log}A} = \frac{-\mathrm{Log}\lambda - (1-\lambda)\lambda^{-1}}{(\mathrm{Log}\lambda)^2};$$

et comme $-\mathrm{Log}\lambda - \dfrac{1}{\lambda} + 1 < 0$ on a $S'_1 > 0$.

D'autre part $\lambda = \dfrac{x_n}{x_{n+1}} \leqslant \dfrac{nx_1}{(n+1)x_1} = \dfrac{n}{n+1}$, donc

$$S_1 \leqslant -\frac{\mathrm{Log}A}{\mathrm{Log}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)}\cdot\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = -\frac{\mathrm{Log}A}{(n+1)\,\mathrm{Log}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)},$$

$$S_1 \leqslant \frac{\mathrm{Log}A}{(n+1)\left[\dfrac{1}{(n+1)} + \dfrac{1}{2(n+1)^2} + \dfrac{1}{3(n+1)^3} + ...\right]} \leqslant \frac{\mathrm{Log}A}{1 + \dfrac{1}{2(n+1)}}$$
$$= \frac{2n+2}{2n+3}\,\mathrm{Log}A.$$

Soit $S_2 = \dfrac{1}{(n+1)} + \dfrac{1}{(n+2)} + ... + \dfrac{1}{\left[\dfrac{x_N}{x_1}\right]}$, on a

$$S_2 + \frac{1}{n} > \mathrm{Log}\,\frac{1 + \left[\dfrac{x_N}{x_1}\right]}{n} \geqslant \mathrm{Log}\,\frac{x_N}{x_n} = \mathrm{Log}\,A.$$

Distinguons deux cas:

1) $\mathrm{Log}\,A \geqslant 5 \geqslant \dfrac{2n+3}{n}$. Alors

$$S_2 - S_1 \geqslant -\frac{1}{n} + \operatorname{Log} A - \operatorname{Log} A + \frac{1}{2n+3} \operatorname{Log} A \geqslant 0 .$$

donc $T(x_1, ..., x_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m}$.

2) $\operatorname{Log} A < 5$. Alors $A < e^5$, donc

$$S_2 > S_1 - \frac{1}{n} > S_1 - \frac{e^5}{\left(\frac{x_N}{x_1}\right)},$$

$$T(x_1, ..., x_N) \leqslant \sum_{m \leqslant \frac{x_N}{x_1}} \frac{1}{m} + e^5 \frac{x_1}{x_N} .$$

LEMME 6. *Soit* $(x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ *une suite réelle strictement croissante* s *et* t *deux entiers tels que* $s > t$,

$$T(..., x_{-1}, x_0, x_1, ...) = \sum_{\substack{r=-\infty \\ r \neq s \quad r \neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2} .$$

Alors

$$T(..., x_{t-1}, x_t, x_{t+1}, ..., x_{s-1}, x_s, x_{s+1}, ...)$$
$$\leqslant \frac{\pi^2(\delta_s^{-1} + \delta_t^{-1})}{3(x_s - x_t)^2} - \frac{3(\delta_s + \delta_t)}{(x_s - x_t)^4} .$$

Définissons $(y_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ par

$$\begin{aligned} y_n &= x_s + (n-s)\delta_s && \text{si} \quad n > s , \\ y_n &= x_n && \text{si} \quad t \leqslant n \leqslant s , \\ y_n &= x_t - (t-n)\delta_t && \text{si} \quad n < t . \end{aligned}$$

D'après (5) on a

$$T(..., y_{t-1}, y_t, y_{t+1}, ..., y_s, y_{s+1}, ...) \geqslant T(..., x_{t-1}, x_t, ..., x_s, x_{s+1}, ...)$$

Il suffit de vérifier que l'inégalité du lemme est vérifiée pour la suite (y_m). Soit N tel que

$$s - N < t \quad \text{et} \quad L = \left[\frac{y_s - y_{s-N}}{\delta_s}\right] \tag{8}$$

Remarquons que pour r, s, t distincts on a

$$\frac{1}{(y_r-y_s)^2}\,\frac{1}{(y_r-y_t)^2}=\left[\frac{1}{y_s-y_r}+\frac{1}{y_r-y_t}\right]^2\frac{1}{(y_s-y_t)^2}$$

$$=\left[\frac{1}{(y_s-y_r)^2}+\frac{1}{(y_r-y_t)^2}\right]\frac{1}{(y_s-y_t)^2}+\frac{2}{(y_s-y_t)^3}\left[\frac{1}{y_s-y_r}+\frac{1}{y_r-y_t}\right].$$

On trouve que

$$S_N=\sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\,r\neq t}}^{s+L}\frac{\delta_r}{(y_s-y_r)^2(y_r-y_t)^2}$$

$$=\sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\,r\neq t}}^{s+L}\left[\frac{\delta_r}{(y_s-y_t)^2}\left(\frac{1}{(y_r-y_s)^2}+\frac{1}{(y_r-y_t)^2}\right)+\frac{2\delta_r}{(y_s-y_t)^3}\left(\frac{1}{(y_r-y_t)}-\frac{1}{(y_r-y_s)}\right)\right].$$

Or, par application du lemme 5, on a:

$$-\sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\,r\neq t}}^{s+L}\frac{\delta_r}{y_r-y_s}=\sum_{r=s-N}^{s-1}\frac{\delta_r}{y_s-y_r}-\frac{\delta_t}{y_s-y_t}-\sum_{r=s+1}^{s+L}\frac{\delta_r}{y_r-y_s}$$

$$<O\left(\frac{y_s-y_{s-1}}{y_s-y_{s-N}}\right)+\sum_{m\leqslant\frac{y_s-y_{s-N}}{y_s-y_{s-1}}}\frac{1}{m}-\sum_{m\leqslant L}\frac{1}{m}-\frac{\delta_t}{y_s-y_t}.$$

Comme $\left[\dfrac{y_s-y_{s-N}}{y_s-y_{s-1}}\right]\leqslant\left[\dfrac{y_s-y_{s-N}}{\delta_s}\right]=L$, on a donc

$$-\sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\,r\neq t}}^{s+L}\frac{\delta_r}{y_r-y_s}<O\left(\frac{y_s-y_{s-1}}{y_s-y_{s-N}}\right)-\frac{\delta_t}{y_s-y_t}. \tag{9}$$

D'autre part

$$\sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\,r\neq t}}^{s+L}\frac{\delta_r}{y_r-y_t}=\sum_{r=t+1}^{s+L}\frac{\delta_r}{y_r-y_t}-\sum_{r=t-1}^{s-N}\frac{\delta_r}{y_t-y_r}-\frac{\delta_s}{y_s-y_t}$$

$$\leqslant\frac{-\delta_s}{y_s-y_t}+O\left(\frac{y_{t+1}-y_t}{y_{s+L}-y_t}\right)+\sum_m{}'\frac{1}{m}-\sum_m{}''\frac{1}{m},$$

avec, pour $\sum'$: $1\leqslant m\leqslant\dfrac{y_{s+L}-y_t}{y_{t+1}-y_t}$, et pour $\sum''$: $1\leqslant m\leqslant N+t-s$,

en appliquant à nouveau le lemme 5 et remarquant que $y_{t-1}, y_{t-2}, \ldots, y_{s-N}$ sont équidistants. La différence entre les deux dernières sommes est (si elle n'est pas négative):

$$\sum_{N+t-s<m\leqslant\frac{y_{s+L}-y_t}{y_{t+1}-y_t}} \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{N+t-s}\left(\frac{y_{s+L}-y_t}{y_{t+1}-y_t}-(N+t-s)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{N+t-s}\left(\frac{L\delta_s+y_s-y_t}{\delta_t}-(N+t-s)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{N+t-s}\left(\frac{y_s-y_{s-N}+y_s-y_t}{\delta_t}-(N+t-s)\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{N+t-s}\left(\frac{2y_s-2y_t}{\delta_t}\right) \tag{10}$$

en utilisant (8) et l'équidistance de $y_{t-1}, ..., y_{s-N}$. D'après (9) et (10) on a:

$$S_N \leqslant \sum_{\substack{r=s-N\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{s+L} \frac{\delta_r}{(y_s-y_t)^2}\left[\frac{1}{(y_r-y_s)^2}+\frac{1}{(y_r-y_t)^2}\right]-\frac{2(\delta_s+\delta_t)}{(y_s-y_t)^4}$$

$$+\frac{2}{(y_s-y_t)^3}\left[O\left(\frac{y_{t+1}-y_t}{y_{s+L}-y_t}\right)+O\left(\frac{y_s-y_{s-1}}{y_s-y_{s-N}}\right)+\frac{2(y_s-y_t)}{(N+t-s)\delta_t}\right].$$

Quand N tend vers l'infini le dernier crochet tend vers zéro, donc:

$$\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_r-y_s)^2(y_r-y_t)^2} \leqslant -\frac{2(\delta_s+\delta_t)}{(y_s-y_t)^4}$$

$$+\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_s-y_t)^2}\left[\frac{1}{(y_r-y_s)^2}+\frac{1}{(y_r-y_t)^2}\right].$$

D'après (3) on sait que

$$\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_r-y_s)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{3}\delta_s^{-1}-\frac{\delta_t}{(y_t-y_s)^2},$$

$$\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq s,\, r\neq t}}^{+\infty} \frac{\delta_r}{(y_r-y_t)^2} \leqslant \frac{\pi^2}{3}\delta_t^{-1}-\frac{\delta_s}{(y_s-y_t)^2}, \text{ d'où le lemme.}$$

PREUVE DU THÉORÈME.

Sans perte de généralité, on peut supposer

$$x_1 < x_2 < ... < x_R \quad \text{et} \quad \sum_{r=1}^{R} |u_r|^2 = 1.$$

Notons $c_r = \sqrt{\delta_r}$ pour $r = 1, 2, ..., R$ et définissons la matrice M par:

$$\begin{cases} (M)_{r,s} = 0 & \text{si} \quad r = s, \\ (M)_{r,s} = \dfrac{c_r c_s}{x_r - x_s} & \text{si} \quad r \neq s. \end{cases}$$

La matrice $i\,M$ est hermitienne, c'est pourquoi ses vecteurs propres sont orthogonaux et

$$\left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r c_s}{x_r - x_s} u_r \bar{u}_s \right|$$

est donc maximal si $(u_r)_{r=1}^{R}$ est un vecteur propre de M dont la valeur propre est maximale en valeur absolue. Admettons que c'est le cas et soit $i\,\mu$ la valeur propre (qui est donc purement imaginaire), on a donc

$$\mu^2 = \left| \sum_{\substack{r,s \\ r \neq s}} \frac{c_r c_s}{(x_r - x_s)} u_r \bar{u}_s \right|^2 \leqslant \Sigma \,|\, u_r \,|^2 \sum_r \left| \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \frac{c_r c_s}{(x_r - x_s)} \bar{u}_s \right|^2,$$

(à cause de l'inégalité de Cauchy)

$$\mu^2 \leqslant \sum_r \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \sum_{\substack{t \\ t \neq r}} \frac{c_r^2 c_s c_t \bar{u}_s u_t}{(x_r - x_s)(x_r - x_t)}.$$

Le membre de droite peut être partagé en deux parties selon que $s = t$ ou non, et remarquons que si $s \neq t$, on a

$$\frac{1}{(x_r - x_s)(x_r - x_t)} = \frac{1}{(x_s - x_t)} \left[\frac{1}{x_r - x_s} - \frac{1}{x_r - x_t} \right],$$

donc

$$\mu^2 \leqslant \sum_r \sum_{\substack{s \\ s \neq r}} \frac{\delta_r \delta_s \,|\, u_s \,|^2}{(x_r - x_s)^2} + \sum_{\substack{r,s,t \\ r \neq s,\, r \neq t \\ s \neq t}} \frac{c_r^2 c_s c_t}{x_s - x_t} \left[\frac{1}{x_r - x_s} - \frac{1}{x_r - x_t} \right] \bar{u}_s u_t.$$

D'après (3) on a

$$\sum_s \sum_{\substack{r \\ r \neq s}} \frac{\delta_r \delta_s \,|\, u_s \,|^2}{(x_r - x_s)^2} \leqslant \sum_s \frac{\pi^2}{3} \,|\, u_s \,|^2 = \frac{\pi^2}{3} \tag{11}$$

et la seconde somme devient

$$S = \sum_{\substack{r,s,t \\ r\neq s,\, s\neq t}} \frac{c_r^2 c_s c_t \bar{u}_s u_t}{(x_s - x_t)(x_r - x_s)} + \sum_{\substack{r,s \\ r\neq s}} \frac{c_r^3 c_s \bar{u}_s u_r}{(x_s - x_r)^2}$$

$$- \sum_{\substack{r,s,t \\ r\neq t,\, s\neq t}} \frac{c_r^2 c_s c_t \bar{u}_s u_t}{(x_s - x_t)(x_r - x_t)} + \sum_{\substack{r,t \\ r\neq t}} \frac{c_r^3 c_t \bar{u}_r u_t}{(x_r - x_t)^2}.$$

Dans la première somme, on a: $\sum_{\substack{t \\ t\neq s}} \frac{c_s c_t u_t}{x_s - x_t} = i\mu u_s$,

et dans la troisième, on a: $\sum_{\substack{s \\ s\neq t}} \frac{c_s c_t \bar{u}_s}{(x_s - x_t)} = i\mu \bar{u}_t$,

d'où

$$S = 2\,\mathrm{Re} \sum_{\substack{r,s \\ r\neq s}} \frac{c_r^3 c_s \bar{u}_s u_r}{(x_s - x_r)^2},$$

$$\frac{S}{2} \leqslant U = \sum_{\substack{r,s \\ r\neq s}} \frac{c_r^3 c_s \,|\, u_s \,|\,|\, u_r \,|}{(x_s - x_r)^2}. \tag{12}$$

D'après l'inégalité de Cauchy, on a:

$$U^2 \leqslant \sum_r |\, u_r \,|^2 \cdot \sum_r \left| \sum_{\substack{s \\ s\neq r}} \frac{c_r c_s^3 \,|\, u_s \,|}{(x_r - x_s)^2} \right|^2,$$

$$U^2 \leqslant \sum_r \sum_{\substack{s,t \\ s\neq r \\ t\neq r}} \frac{c_r^2 c_s^3 c_t^3 \,|\, u_s \,|\,|\, u_t \,|}{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2},$$

$$U^2 \leqslant \sum_r \sum_{\substack{s \\ s\neq r}} \frac{\delta_r \delta_s^3 \,|\, u_s \,|^2}{(x_r - x_s)^4} + \sum_{\substack{r,s,t \\ r\neq s,\, r\neq t \\ s\neq t}} \frac{c_r^2 c_s^3 c_t^3 \,|\, u_s \,|\,|\, u_t \,|}{(x_r - x_s)^2 (x_r - x_t)^2}.$$

Par application de (4) et du lemme 6, on trouve:

$$U^2 \leqslant 2 \cdot \frac{\pi^4}{90} + \sum_{\substack{s,t \\ s\neq t}} \frac{\pi^2}{3} c_s^3 c_t^3 (\delta_s^{-1} + \delta_t^{-1}) \frac{|\, u_s \,|\,|\, u_t \,|}{(x_s - x_t)^2},$$

$$U^2 \leqslant \frac{\pi^4}{45} + \frac{2\pi^2}{3} U,$$

$$\left(U - \frac{\pi^2}{3}\right)^2 \leqslant \frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^4}{9},$$

$$U \leqslant \frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}.$$

De (11) et (12) on déduit

$$\mu^2 \leqslant \frac{\pi^2}{3} + 2\left[\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi^2}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}\right],$$

$$\mu \leqslant \sqrt{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{6}{5}}}\,\pi < \frac{4}{3}\pi.$$

Le point faible de la démonstration est sans doute la non utilisation du terme $-\dfrac{3(\delta_s+\delta_t)}{(x_s-x_t)^4}$ du lemme 6.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBAN, M. B. The "density" of the zeros of Dirichlet L-series and the problem of the sum of primes and "near primes". *Math. Sb. 61 (103)* (1963), 418-425.

[2] BOMBIERI, E. *Le grand crible dans la théorie analytique des nombres.* Astérisque 18, S.M.F. (1974).

[3] HALBERSTAM, H. and H. E. RICHERT. *Sieve Methods.* Academic Press, Londres (1974).

[4] MONTGOMERY, H. L. *Topics in multiplicative number theory.* Lecture Notes in Math., vol. 227, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[5] —— The analytic principle of the large sieve. *Bull. of the Am. Math. Soc. 84 (4)* (1978), 73-81.

[6] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. The large sieve. *Mathematika 20* (1973), 119-134.

[7] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. Hilbert's inequality. *J. London Math. Soc. (2), 8* (1974), 73-81.

(Reçu le 24 juin 1983)

Emmanuel Preissmann

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne
CH-1015 Lausanne/Dorigny