Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1984)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GROUPE DE BRAUER DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES À COEFFICIENTS COMPLEXES

Autor: Steiner, Philippe A. J.

Kapitel: Introduction

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53824

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 30 (1984), p. 115-140

GROUPE DE BRAUER DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES À COEFFICIENTS COMPLEXES

par Philippe A. J. STEINER

INTRODUCTION

Le but de cet article est de calculer le groupe de Brauer des corps de fractions rationnelles à coefficients complexes $\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)$. Dès que n est supérieur ou égal à 2, ce groupe est non nul et il se décompose en une somme directe non dénombrable de groupes $\chi(K)$ associés à des corps de fonctions complexes K. Plus précisément, on a une formule de récurrence

$$\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)) \simeq \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_{n-1})) \oplus \{\oplus_f \chi(K_f)\},$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, ..., t_{n-1})$ et où K_f est l'extension de $\mathbf{C}(t_1, ..., t_{n-1})$ obtenue en adjoignant une racine de f.

Chaque groupe $\chi(K)$ est calculé à l'aide d'un modèle géométrique de K, c'est-à-dire à l'aide d'une variété algébrique lisse X ayant K pour corps des fonctions. On obtient la suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \chi(K) \to \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

qui exprime $\chi(K)$ en terme du groupe $\mathrm{Div}(X)$ des diviseurs de X et de la cohomologie $H^i(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ de X muni de la topologie transcendante et où l'homomorphisme c est induit par la première classe de Chern.

On montrera ensuite comment (une fois un modèle X de K fixé) on peut construire des algèbres simples centrales sur $\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)$ à partir d'éléments de $\mathrm{Div}(X)$ et de $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$, puis qu'il existe un modèle X pour lequel $H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est divisible. Soit X_f un tel modèle de K_f et notons $\mathrm{Div}_0(X_f)$ son groupe des diviseurs dont la première classe de Chern est nulle. On obtient une formule

$$\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)) \simeq \oplus_f \{H^1(X_f, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \oplus \mathrm{Div}_0(X_f) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\},$$

où f parcourt l'ensemble des polynômes unitaires irréductibles à coefficients dans $\mathbf{C}(t_1, ..., t_i)$ pour $1 \leqslant i < n$. On établit enfin que $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ est divisible et que, pour $n \geqslant 2$, sa classe d'isomorphie est indépendante de n.

Les deux premiers paragraphes sont consacrés aux rappels du théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev (qui fournit la décomposition de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ en somme directe) et de la normalisation en géométrie algébrique. Dans les paragraphes 3 et 4, on dérive la suite exacte qui détermine le groupe $\chi(K)$. On en tire au paragraphe 5 un procédé pour construire « explicitement » des algèbres simples, puis on termine en établissant au paragraphe 6 la formule finale pour $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ et en montrant que ce groupe est divisible.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont aidé à accomplir ce travail, notamment M. Kervaire qui m'en a suggéré le thème.

§ 1. Théorème d'Auslander-Brumer-Faddeev

Ce théorème calcule la structure du groupe de Brauer d'un corps de fractions rationnelles à une variable sur un corps quelconque. En se restreignant à la caractéristique zéro pour simplifier, on va rappeler (d'après [7]) comment il découle d'un résultat classique de Tsen.

Si K est un corps, on notera $K^{\bullet}$ son groupe multiplicatif, $\mathscr{P}(K)$ l'ensemble des polynômes en T unitaires irréductibles à coefficients dans K et si $f \in \mathscr{P}(K)$, K_f sera l'extension $K[T]/(f(T))$ de K. Si $\bar{K}$ est une clôture algébrique de K, on considérera le groupe $\chi_{\bar{K}}(K)$ des homomorphismes $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ d'ordre fini (le groupe des homomorphismes continus pour les topologies discrète de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et naturelle de $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K)$). Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est abélien, si $\tilde{K}$ est une autre clôture algébrique de K, $\chi_{\bar{K}}(K)$ est canoniquement isomorphe à $\chi_{\tilde{K}}(K)$ et sera noté simplement $\chi(K)$.

Théorème 1.1 (Auslander-Brumer [1], Faddeev [6]). *Soit K un corps de caractéristique zéro. On a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Br}(K(t)) = \mathrm{Br}(K) \oplus \{\oplus_{f \in \mathscr{P}(K)} \chi(K_f)\}.$$

Démonstration. Tout repose sur l'interprétation du groupe de Brauer comme groupe de cohomologie galoisienne. Pour cette interprétation, ainsi que pour la notion de produit croisé, on pourra se reporter à [14].

1) *Construction de l'isomorphisme:* Fixons une clôture algébrique $\bar{K}$ de K. Par le théorème de Tsen [14, Chap. 19, § 4], $\mathrm{Br}(\bar{K}(t)) = 0$ et donc