Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1984)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: GROUPE DE BRAUER DES CORPS DE FRACTIONS RATIONNELLES À COEFFICIENTS COMPLEXES

Autor: Steiner, Philippe A. J.

Kapitel: §4. Interprétation de (K)

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53824

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

complète, c'est-à-dire compacte pour la topologie transcendante. En triangulant, on peut trouver un voisinage tubulaire U du fermé $\Sigma := (\tilde{X} - X) \cup \bar{\Delta}$, de sorte que $W = X - \Delta = \tilde{X} - \Sigma$ se rétracte par déformations sur $\tilde{X} - U$. Par compacité, l'homologie de $\tilde{X} - U$ (et donc celle de W) est de type fini [5, Chap. VIII, cor. 1.4].

Soit $x \in W$. Notons $\rho : \pi_1(W, x) \to H_1(W)$ la projection canonique et N le sous-groupe $\mathrm{Ker}(\psi' \circ \rho)$ invariant d'indice m dans $\pi_1(W, x)$. A N correspond un revêtement topologique galoisien non ramifié à m feuillets $p : Z \to W$, tel que $p_* \pi_1(Z, y) = N$ pour tout $y \in p^{-1}(x)$. Remarquons que le groupe $\mathrm{Aut}_W(Z) \simeq \pi_1(W, x)/p_* \pi_1(Z, y)$ est abélien, car par passage au quotient $\psi' \circ \rho$ devient une injection $\psi'' : \mathrm{Aut}_W(Z) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

C'est maintenant qu'on utilise le théorème d'existence de Riemann généralisé pour savoir qu'on peut munir Z d'une structure de variété algébrique normale de sorte que p soit un morphisme algébrique fini. Notons $L = \mathbf{C}(Z)$. La paire (Z, p) est la normalisation de W dans L, de sorte que, si (Y, ν) est celle de X dans L, par unicité, on peut supposer $Z \subset Y$ et $p = \nu|_Z$.

On veut montrer que l'extension L/K est galoisienne. Pour cela, on choisit une extension galoisienne L'/K contenant L et on considère la normalisation (Y', μ) de Y dans L'. Quitte à agrandir Δ, on peut supposer qu'il contient la ramification de $\nu' := \nu \circ \mu$. Notons $Z' = Y' - \nu'^{-1}(\Delta)$. En utilisant les suites (6) correspondant à ν, ν' et μ, on obtient la suite exacte

$$1 \to \mathrm{Aut}_Z(Z') \to \mathrm{Aut}_W(Z') \to \mathrm{Aut}_W(Z) \to 1 .$$

Par l'isomorphisme du lemme 3.2, l'inclusion de $\mathrm{Aut}_Z(Z')$ dans $\mathrm{Aut}_W(Z')$ correspond à celle de $\mathrm{Gal}(L'/L)$ dans $\mathrm{Gal}(L'/K)$, ce qui montre que ce dernier sous-groupe est invariant et que l'extension L/K est galoisienne.

Soit L_0 l'unique sous-corps de $\bar{K}$ isomorphe à L. On a les identifications $\mathrm{Gal}(L_0/K) = \mathrm{Gal}(L/K) = \mathrm{Aut}_W(Z)$, la première étant induite par n'importe quel isomorphisme $L_0 \simeq L$, mais n'en dépendant pas puisque les groupes sont abéliens. On peut donc définir $\varphi \in \chi(K)$ comme la composition de la projection $\mathrm{Gal}(\bar{K}/K) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L_0/K)$ suivie de $\psi'' : \mathrm{Aut}_W(Z) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Par construction, $F(\varphi) = \psi$. □

§ 4. Interprétation de $\chi(K)$

Soit K un corps de fonctions complexes et soit X une variété algébrique lisse avec corps des fonctions $\mathbf{C}(X) \simeq K$. A partir du calcul du § 3, on interprète $\chi(K)$ en terme d'invariants usuels de X : le groupe des diviseurs

(algébriques) $\mathrm{Div}(X)$ de X et les premiers groupes de cohomologie de X muni de la topologie transcendante.

THÉORÈME 4.1. *Soit* K *un corps de fonctions complexes et soit* X *une variété algébrique lisse avec* $\mathbf{C}(X) \simeq K$. *Alors on a la suite exacte*

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \chi(K) \to \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où l'homomorphisme c *est induit par la première classe de Chern.*

Démonstration. En identifiant $\mathbf{C}(X)$ à K, on a

$$\chi(K) = \varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

par le théorème 3.1.

1) *Calcul de* $H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$: Soit $D \in \mathscr{V}(X)$. On veut expliciter le groupe $H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(X-D), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On part de la suite exacte d'homologie de $(X, X-D)$:

$$(9) \qquad H_2(X) \to H_2(X, X-D) \to H_1(X-D) \to H_1(X) \to H_1(X, X-D).$$

Comme D est de codimension (réelle) 2 dans X, on a immédiatement $H_1(X, X-D) = 0$, car tout lacet dans X peut être poussé dans $X - D$. Notons D_s la partie singulière et $D_r = D - D_s$ la partie régulière de D. Comme D_s est de codimension au moins 4 dans X, on a aussi $H_2(X, X-D) \simeq H_2(X-D_s, X-D)$. On va calculer ce dernier groupe en utilisant l'isomorphisme de Thom.

Notons $2n$ la dimension de X. On a deux isomorphismes de dualité de Poincaré exprimant la cohomologie à supports compacts de D_r [5, Chap. VIII, prop. 7.14]

$$H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow[\sim]{\frown [D_r]} H_0(D_r) \quad \text{et} \quad H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow[\sim]{\frown [X-D_s]} H_2(X-D_s, X-D),$$

donnés par une généralisation du produit cap usuel $\frown$ avec la classe fondamentale $[-]$. On obtient ainsi l'isomorphisme de Thom

$$(10) \qquad \tau : H_0(D_r) \xrightarrow{\sim} H_2(X-D_s, X-D),$$

que l'on peut interpréter géométriquement de la façon suivante [5, Chap. VIII, § 11]. Si Δ est une composante connexe de D_r et si on note η_Δ l'élément de $H_0(D_r)$ correspondant, alors $\tau(\eta_\Delta) \in H_2(X-D_s, X-D)$ peut être représenté par un petit disque transverse à Δ. En utilisant cet isomorphisme τ, on obtient de (9) la suite exacte

$$(11) \qquad H_2(X) \xrightarrow{\gamma} H_0(D_r) \xrightarrow{\beta} H_1(X-D) \to H_1(X) \to 0 .$$

Le groupe $H_0(D_r)$ est abélien libre sur les composantes connexes de D_r. Montrons que ces dernières correspondent exactement aux composantes algébriques irréductibles de D. Considérons la décomposition $D = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_m$ de D en composantes irréductibles. Comme $\Delta_i \cap \Delta_j \subset D_s$ si $i \neq j$, on a une réunion disjointe $D_r = \Delta'_1 \coprod \ldots \coprod \Delta'_m$, où les $\Delta'_i := \Delta_i \cap D_r$ sont non vides, fermés, ouverts (dans D_r) et irréductibles pour la topologie de Zariski. Ils sont ainsi fermés, ouverts et connexes pour la topologie transcendante. Ce sont donc les composantes connexes de D_r.

Notons $\mathscr{C}(D)$ l'ensemble des composantes irréductibles de D. Grâce à la décomposition $H_0(D_r) = \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$, on peut définir, pour tout $\Delta \in \mathscr{C}(D)$, l'homomorphisme $\varepsilon_\Delta : H_0(D_r) \to \mathbf{Z}$ dual de η_Δ, donné par $\varepsilon_\Delta(\eta_{\Delta'}) = \delta_{\Delta, \Delta'}$. Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est divisible, le foncteur $\mathrm{Hom}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est exact et, appliqué à (11), il fournit la suite exacte:

$$(12) \quad 0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta \to H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) .$$

2) *Passage à* $\chi(K)$: Soient $D_1, D_2 \in \mathscr{V}(X)$ avec $D_1 \subset D_2$. On vérifie facilement que les suites (11) et donc (12) leur correspondant sont compatibles, l'application $\oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D_1)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta \to \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D_2)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta$ étant l'injection induite par $\mathscr{C}(D_1) \subset \mathscr{C}(D_2)$. On peut alors prendre la limite inductive de toutes ces suites et en utilisant que $\mathrm{Div}(X) = \varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} \{\oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\Delta\}$, on trouve la suite exacte désirée

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \chi(K) \to \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) .$$

3) *Identification de* c: Il reste à montrer que $c : \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est induit par la première classe de Chern $c_1 : \mathrm{Div}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$. En supposant tout d'abord la variété X compacte (et lisse), on va le vérifier sur un élément de la base de $\mathrm{Div}(X)$, c'est-à-dire sur une sous-variété de codimension 1 *irréductible* D de X. Dans ce cas, si $l \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, on a défini $c(D \otimes l)$ comme l'image de $l\varepsilon_D$ par l'application $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_D \to \mathrm{Hom}(H_2(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ duale de l'homomorphisme $\gamma : H_2(X) \to H_0(D_r)$ de (11). On peut se ramener à considérer l'application $\gamma^* : \mathbf{Z}\varepsilon_D \to \mathrm{Hom}(H_2(X), \mathbf{Z})$ duale dans $\mathbf{Z}$ de γ et à vérifier, pour tout $\omega \in H_2(X)$, la formule

$$(13) \qquad < c_1(D) ; \omega > \; = \gamma^*(\varepsilon_D)(\omega)$$

où $< ; > : H^2(X, \mathbf{Z}) \times H_2(X) \to \mathbf{Z}$ est l'évaluation (l'indice de Kronecker).

Notons $i: D \hookrightarrow X$ l'inclusion et $[D] \in H_{2n-2}(D)$ la classe fondamentale (D est compact). D'après [11], $c_1(D)$ est le dual de Poincaré de la classe d'homologie de X portée par D; en formules $c_1(D) = (i_*[D])_d$. En exprimant l'indice de Kronecker au moyen du produit cap et de $\varepsilon: H_0(X) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}$ (voir [5, Chap. VII, n° 12.24]), le premier membre de (13) devient

$$< c_1(D); \omega > \; = \; < (i_*[D])_d; \omega > \; = \; \varepsilon((i_*[D])_d \frown \omega) .$$

Passons au second membre et examinons $\gamma: H_2(X) \to H_0(D_r)$. D'après sa définition, γ peut être calculé à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H_2(X) & \to & H_2(X, X-D) & \simeq & H_2(X-D_s, X-D) \\
\simeq \uparrow \frown [X] & & \simeq \uparrow \frown [X] & & \simeq \uparrow \frown [X-D_s] \\
H^{2n-2}(X) & \xrightarrow{i^*} & H^{2n-2}(D) & \simeq & H_c^{2n-2}(D_r) \\
 & & \simeq \downarrow \frown [D] & & \simeq \downarrow \frown [D_r] \\
 & & H_0(D) & \simeq & H_0(D_r) ,
\end{array}$$

où l'isomorphisme $H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow{\sim} H^{2n-2}(D) = H_c^{2n-2}(D)$ est induit par l'inclusion $D_r \subset D$. Par l'isomorphisme $H_0(D) \simeq H_0(D_r)$, on peut considérer $\gamma(\omega)$ comme élément de $H_0(D)$ et $\varepsilon_D: H_0(D) \to \mathbf{Z}$. Le second membre de (13) est alors

$$\gamma^*(\varepsilon_D)(\omega) = \varepsilon_D(i^*\omega_d \frown [D]) ,$$

où ω_d est le dual de Poincaré de ω.

Notons encore $i_*: H_0(D) \to H_0(X)$ l'application induite par i. Il faut vérifier l'égalité dans $H_0(X)$ de $(i_*[D])_d \frown \omega$ et de $i_*(i^*\omega_d \frown [D])$, mais par naturalité du produit cap [5, Chap. VII, n° 12.6], on a $i_*(i^*\omega_d \frown [D]) = \omega_d \frown i_*[D]$. En utilisant ensuite la formule d'associativité du produit cap [5, Chap. VII, n° 12.7] et le fait que ω et $\omega' := i_*[D]$ sont de dimension paire, on voit facilement que $\omega'_d \frown \omega = \omega_d \frown \omega'$, ce qui montre (13).

Dans le cas général (X non compact), on plonge X comme ouvert dans une variété complète $\tilde{X}$ que l'on peut supposer lisse par le théorème de désingularisation de Hironaka [9]. On vérifie ensuite la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Div}(\tilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{\tilde{c}} & H^2(\tilde{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \xrightarrow{c} & H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) ,
\end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont induits par l'inclusion $X \subset \tilde{X}$, celui de gauche étant surjectif. Comme $\tilde{X}$ est compact, on peut appliquer le raisonnement ci-dessus à $\tilde{c}$. On en déduit que $\tilde{c}$ et donc c sont induits par la première classe de Chern. □

§ 5. Application à la construction d'algèbres simples

On a vu que pour un corps de fonctions complexes K et pour une variété algébrique lisse X avec $\mathbf{C}(X) = K$, on a la suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{a} \chi(K) \xrightarrow{b} \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Problème 5.1. Soient $f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_n))$ un polynôme unitaire irréductible, ξ une racine de f engendrant l'extension K de $\mathbf{C}(t_1, ..., t_n)$ et X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) = K$.

Etant donné $\delta \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $c(\delta) = 0$, on aimerait décrire tous les relevés de δ par b et les éléments de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, ..., t_{n+1}))$ leur correspondant par l'isomorphisme (5).

On va résoudre ce problème en explicitant l'homomorphisme b (lemme 5.2 ci-dessous). Par contre, la méthode de calcul de a qu'on peut déduire de la démonstration du théorème 3.1 (point 4, avec $\Delta = \emptyset$) n'est pas très explicite. Nous comparerons les deux descriptions de $\mathrm{Im}\, a = \mathrm{Ker}\, b$ en fin de paragraphe.

Lemme 5.2. *Soit* $\varphi \in \chi(K)$. *Notons* $L = \bar{K}^{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ *et* θ *le générateur de* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *tel que* $\varphi(\theta) = 1/m \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. *Soit* $\kappa \in K$ *tel que* $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$ *et* $\theta(\sqrt[m]{\kappa}) = e^{-2\pi i/m} \cdot \sqrt[m]{\kappa}$. *Alors* $b(\varphi) = (\kappa) \otimes 1/m \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, *où* (κ) *est le diviseur de* κ.

Démonstration. D'après la définition de b, il faut d'abord calculer l'image de φ dans $\varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ par l'isomorphisme F du théorème 3.1. On va voir qu'on peut représenter $F(\varphi)$ dans $H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ pour D le support du diviseur (κ), puis on va exprimer son représentant $\pi^*(\varphi)$ en terme de κ. Il faudra ensuite revenir à la démonstration du théorème 4.1 pour calculer $b(\varphi)$ à partir de $\pi^*(\varphi)$.

1) *Choix de* $D \in \mathscr{V}(X)$: Notons (Y, ν) la normalisation de X dans L et $D \in \mathscr{V}(X)$ le support de (κ). On montre que D contient la ramification de ν.

Soit U un ouvert affine quelconque de $X - D$. Considérons la sous-variété affine V de $U \times \mathbf{C}$ définie par

$$V = \{(x, \zeta) \in U \times \mathbf{C} \mid \zeta^m = \kappa(x)\}. \tag{14}$$