§4. Interprétation de (K)

complète, c'est-à-dire compacte pour la topologie transcendante. En triangulant, on peut trouver un voisinage tubulaire U du fermé $\Sigma := (\tilde{X} - X) \cup \bar{\Delta}$, de sorte que $W = X - \Delta = \tilde{X} - \Sigma$ se rétracte par déformations sur $\tilde{X} - U$. Par compacité, l'homologie de $\tilde{X} - U$ (et donc celle de W) est de type fini [5, Chap. VIII, cor. 1.4].

Soit $x \in W$. Notons $\rho: \pi_1(W, x) \to H_1(W)$ la projection canonique et N le sous-groupe $\operatorname{Ker}(\psi' \circ \rho)$ invariant d'indice m dans $\pi_1(W, x)$. A N correspond un revêtement topologique galoisien non ramifié à m feuillets $p: Z \to W$, tel que $p_* \pi_1(Z, y) = N$ pour tout $y \in p^{-1}(x)$. Remarquons que le groupe $\operatorname{Aut}_W(Z) \simeq \pi_1(W, x)/p_* \pi_1(Z, y)$ est abélien, car par passage au quotient $\psi' \circ \rho$ devient une injection $\psi'': \operatorname{Aut}_W(Z) \hookrightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

C'est maintenant qu'on utilise le théorème d'existence de Riemann généralisé pour savoir qu'on peut munir Z d'une structure de variété algébrique normale de sorte que p soit un morphisme algébrique fini. Notons $L = \mathbf{C}(Z)$. La paire (Z, p) est la normalisation de W dans L, de sorte que, si (Y, ν) est celle de X dans L, par unicité, on peut supposer $Z \subset Y$ et $p = \nu|_Z$.

On veut montrer que l'extension L/K est galoisienne. Pour cela, on choisit une extension galoisienne L'/K contenant L et on considère la normalisation (Y', μ) de Y dans L'. Quitte à agrandir Δ, on peut supposer qu'il contient la ramification de $\nu' := \nu \circ \mu$. Notons $Z' = Y' - \nu'^{-1}(\Delta)$. En utilisant les suites (6) correspondant à ν, ν' et μ, on obtient la suite exacte

$$1 \to \operatorname{Aut}_Z(Z') \to \operatorname{Aut}_W(Z') \to \operatorname{Aut}_W(Z) \to 1\,.$$

Par l'isomorphisme du lemme 3.2, l'inclusion de $\operatorname{Aut}_Z(Z')$ dans $\operatorname{Aut}_W(Z')$ correspond à celle de $\operatorname{Gal}(L'/L)$ dans $\operatorname{Gal}(L'/K)$, ce qui montre que ce dernier sous-groupe est invariant et que l'extension L/K est galoisienne.

Soit L_0 l'unique sous-corps de $\bar{K}$ isomorphe à L. On a les identifications $\operatorname{Gal}(L_0/K) = \operatorname{Gal}(L/K) = \operatorname{Aut}_W(Z)$, la première étant induite par n'importe quel isomorphisme $L_0 \simeq L$, mais n'en dépendant pas puisque les groupes sont abéliens. On peut donc définir $\varphi \in \chi(K)$ comme la composition de la projection $\operatorname{Gal}(\bar{K}/K) \twoheadrightarrow \operatorname{Gal}(L_0/K)$ suivie de $\psi'': \operatorname{Aut}_W(Z) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Par construction, $F(\varphi) = \psi$. □

§ 4. Interprétation de $\chi(K)$

Soit K un corps de fonctions complexes et soit X une variété algébrique lisse avec corps des fonctions $\mathbf{C}(X) \simeq K$. A partir du calcul du § 3, on interprète $\chi(K)$ en terme d'invariants usuels de X: le groupe des diviseurs (algébriques) $\mathrm{Div}(X)$ de X et les premiers groupes de cohomologie de X muni de la topologie transcendante.

THÉORÈME 4.1. *Soit K un corps de fonctions complexes et soit X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) \simeq K$. Alors on a la suite exacte*

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \chi(K) \to \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}),$$

où l'homomorphisme c est induit par la première classe de Chern.

Démonstration. En identifiant $\mathbf{C}(X)$ à K, on a

$$\chi(K) = \varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

par le théorème 3.1.

1) *Calcul de $H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$:* Soit $D \in \mathscr{V}(X)$. On veut expliciter le groupe $H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = \mathrm{Hom}(H_1(X-D), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On part de la suite exacte d'homologie de $(X, X-D)$:

$$(9) \qquad H_2(X) \to H_2(X, X-D) \to H_1(X-D) \to H_1(X) \to H_1(X, X-D).$$

Comme D est de codimension (réelle) 2 dans X, on a immédiatement $H_1(X, X-D) = 0$, car tout lacet dans X peut être poussé dans $X - D$. Notons D_s la partie singulière et $D_r = D - D_s$ la partie régulière de D. Comme D_s est de codimension au moins 4 dans X, on a aussi $H_2(X, X-D) \simeq H_2(X-D_s, X-D)$. On va calculer ce dernier groupe en utilisant l'isomorphisme de Thom.

Notons $2n$ la dimension de X. On a deux isomorphismes de dualité de Poincaré exprimant la cohomologie à supports compacts de D_r [5, Chap. VIII, prop. 7.14]

$$H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow[\sim]{\frown [D_r]} H_0(D_r) \quad \text{et} \quad H_c^{2n-2}(D_r) \xrightarrow[\sim]{\frown [X-D_s]} H_2(X-D_s, X-D),$$

donnés par une généralisation du produit cap usuel $\frown$ avec la classe fondamentale $[-]$. On obtient ainsi l'isomorphisme de Thom

$$(10) \qquad \tau: H_0(D_r) \xrightarrow{\sim} H_2(X-D_s, X-D),$$

que l'on peut interpréter géométriquement de la façon suivante [5, Chap. VIII, § 11]. Si Δ est une composante connexe de D_r et si on note η_Δ l'élément de $H_0(D_r)$ correspondant, alors $\tau(\eta_\Delta) \in H_2(X-D_s, X-D)$ peut être représenté par un petit disque transverse à Δ. En utilisant cet isomorphisme τ, on obtient de (9) la suite exacte

$$(11) \qquad H_2(X) \xrightarrow{\gamma} H_0(D_r) \xrightarrow{\beta} H_1(X-D) \to H_1(X) \to 0\,.$$

Le groupe $H_0(D_r)$ est abélien libre sur les composantes connexes de D_r. Montrons que ces dernières correspondent exactement aux composantes algébriques irréductibles de D. Considérons la décomposition $D = \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_m$ de D en composantes irréductibles. Comme $\Delta_i \cap \Delta_j \subset D_s$ si $i \neq j$, on a une réunion disjointe $D_r = \Delta'_1 \coprod \ldots \coprod \Delta'_m$, où les $\Delta'_i := \Delta_i \cap D_r$ sont non vides, fermés, ouverts (dans D_r) et irréductibles pour la topologie de Zariski. Ils sont ainsi fermés, ouverts et connexes pour la topologie transcendante. Ce sont donc les composantes connexes de D_r.

Notons $\mathscr{C}(D)$ l'ensemble des composantes irréductibles de D. Grâce à la décomposition $H_0(D_r) = \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\eta_\Delta$, on peut définir, pour tout $\Delta \in \mathscr{C}(D)$, l'homomorphisme $\varepsilon_\Delta : H_0(D_r) \to \mathbf{Z}$ dual de η_Δ, donné par $\varepsilon_\Delta(\eta_{\Delta'}) = \delta_{\Delta,\Delta'}$. Comme $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est divisible, le foncteur $\mathrm{Hom}(-, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est exact et, appliqué à (11), il fournit la suite exacte:

$$(12) \quad 0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta \to H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\,.$$

2) *Passage à* $\chi(K)$*:* Soient $D_1, D_2 \in \mathscr{V}(X)$ avec $D_1 \subset D_2$. On vérifie facilement que les suites (11) et donc (12) leur correspondant sont compatibles, l'application $\oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D_1)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta \to \oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D_2)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta$ étant l'injection induite par $\mathscr{C}(D_1) \subset \mathscr{C}(D_2)$. On peut alors prendre la limite inductive de toutes ces suites et en utilisant que $\mathrm{Div}(X) = \varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} \{\oplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Z}\Delta\}$, on trouve la suite exacte désirée

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \chi(K) \to \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})\,.$$

3) *Identification de* c*:* Il reste à montrer que $c : \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ est induit par la première classe de Chern $c_1 : \mathrm{Div}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$. En supposant tout d'abord la variété X compacte (et lisse), on va le vérifier sur un élément de la base de $\mathrm{Div}(X)$, c'est-à-dire sur une sous-variété de codimension 1 *irréductible* D de X. Dans ce cas, si $l \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, on a défini $c(D \otimes l)$ comme l'image de $l\varepsilon_D$ par l'application $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_D \to \mathrm{Hom}(H_2(X), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ duale de l'homomorphisme $\gamma : H_2(X) \to H_0(D_r)$ de (11). On peut se ramener à considérer l'application $\gamma^* : \mathbf{Z}\varepsilon_D \to \mathrm{Hom}(H_2(X), \mathbf{Z})$ duale dans $\mathbf{Z}$ de γ et à vérifier, pour tout $\omega \in H_2(X)$, la formule

$$(13) \qquad < c_1(D); \omega > \; = \gamma^*(\varepsilon_D)(\omega)$$

où $< ; > : H^2(X, \mathbf{Z}) \times H_2(X) \to \mathbf{Z}$ est l'évaluation (l'indice de Kronecker).

Notons $i: D \hookrightarrow X$ l'inclusion et $[D] \in H_{2n-2}(D)$ la classe fondamentale (D est compact). D'après [11], $c_1(D)$ est le dual de Poincaré de la classe d'homologie de X portée par D; en formules $c_1(D) = (i_*[D])_d$. En exprimant l'indice de Kronecker au moyen du produit cap et de $\varepsilon: H_0(X) \tilde{\rightarrow} \mathbf{Z}$ (voir [5, Chap. VII, n° 12.24]), le premier membre de (13) devient

$$< c_1(D); \omega > \; = \; < (i_*[D])_d; \omega > \; = \varepsilon\big((i_*[D])_d \frown \omega\big) .$$

Passons au second membre et examinons $\gamma: H_2(X) \to H_0(D_r)$. D'après sa définition, γ peut être calculé à l'aide du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
H_2(X) & \to & H_2(X, X-D) & \simeq & H_2(X-D_s, X-D) \\
\simeq \uparrow \frown [X] & & \simeq \uparrow \frown [X] & & \simeq \uparrow \frown [X-D_s] \\
H^{2n-2}(X) & \overset{i^*}{\to} & H^{2n-2}(D) & \simeq & H_c^{2n-2}(D_r) \\
 & & \simeq \downarrow \frown [D] & & \simeq \downarrow \frown [D_r] \\
 & & H_0(D) & \simeq & H_0(D_r) ,
\end{array}$$

où l'isomorphisme $H_c^{2n-2}(D_r) \tilde{\rightarrow} H^{2n-2}(D) = H_c^{2n-2}(D)$ est induit par l'inclusion $D_r \subset D$. Par l'isomorphisme $H_0(D) \simeq H_0(D_r)$, on peut considérer $\gamma(\omega)$ comme élément de $H_0(D)$ et $\varepsilon_D: H_0(D) \to \mathbf{Z}$. Le second membre de (13) est alors

$$\gamma^*(\varepsilon_D)(\omega) = \varepsilon_D(i^*\omega_d \frown [D]) ,$$

où ω_d est le dual de Poincaré de ω.

Notons encore $i_*: H_0(D) \to H_0(X)$ l'application induite par i. Il faut vérifier l'égalité dans $H_0(X)$ de $(i_*[D])_d \frown \omega$ et de $i_*(i^*\omega_d \frown [D])$, mais par naturalité du produit cap [5, Chap. VII, n° 12.6], on a $i_*(i^*\omega_d \frown [D]) = \omega_d \frown i_*[D]$. En utilisant ensuite la formule d'associativité du produit cap [5, Chap. VII, n° 12.7] et le fait que ω et $\omega' := i_*[D]$ sont de dimension paire, on voit facilement que $\omega'_d \frown \omega = \omega_d \frown \omega'$, ce qui montre (13).

Dans le cas général (X non compact), on plonge X comme ouvert dans une variété complète $\tilde{X}$ que l'on peut supposer lisse par le théorème de désingularisation de Hironaka [9]. On vérifie ensuite la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Div}(\tilde{X}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \overset{\tilde{c}}{\to} & H^2(\tilde{X}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} & \overset{c}{\to} & H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) ,
\end{array}$$

où les homomorphismes verticaux sont induits par l'inclusion $X \subset \tilde{X}$, celui de gauche étant surjectif. Comme $\tilde{X}$ est compact, on peut appliquer le raisonnement ci-dessus à $\tilde{c}$. On en déduit que $\tilde{c}$ et donc c sont induits par la première classe de Chern. □

§ 5. Application à la construction d'algèbres simples

On a vu que pour un corps de fonctions complexes K et pour une variété algébrique lisse X avec $\mathbf{C}(X) = K$, on a la suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{a} \chi(K) \xrightarrow{b} \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Problème 5.1. Soient $f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n))$ un polynôme unitaire irréductible, ξ une racine de f engendrant l'extension K de $\mathbf{C}(t_1, \dots, t_n)$ et X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) = K$.

Etant donné $\delta \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $c(\delta) = 0$, on aimerait décrire tous les relevés de δ par b et les éléments de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \dots, t_{n+1}))$ leur correspondant par l'isomorphisme (5).

On va résoudre ce problème en explicitant l'homomorphisme b (lemme 5.2 ci-dessous). Par contre, la méthode de calcul de a qu'on peut déduire de la démonstration du théorème 3.1 (point 4, avec $\Delta = \emptyset$) n'est pas très explicite. Nous comparerons les deux descriptions de $\mathrm{Im}\, a = \mathrm{Ker}\, b$ en fin de paragraphe.

Lemme 5.2. *Soit* $\varphi \in \chi(K)$. *Notons* $L = \bar{K}^{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ *et* θ *le générateur de* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *tel que* $\varphi(\theta) = 1/m \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. *Soit* $\kappa \in K$ *tel que* $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$ *et* $\theta(\sqrt[m]{\kappa}) = e^{-2\pi i/m} \cdot \sqrt[m]{\kappa}$. *Alors* $b(\varphi) = (\kappa) \otimes 1/m \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, *où* (κ) *est le diviseur de* κ.

Démonstration. D'après la définition de b, il faut d'abord calculer l'image de φ dans $\varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ par l'isomorphisme F du théorème 3.1. On va voir qu'on peut représenter $F(\varphi)$ dans $H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ pour D le support du diviseur (κ), puis on va exprimer son représentant $\pi^*(\varphi)$ en terme de κ. Il faudra ensuite revenir à la démonstration du théorème 4.1 pour calculer $b(\varphi)$ à partir de $\pi^*(\varphi)$.

1) *Choix de* $D \in \mathscr{V}(X)$: Notons (Y, ν) la normalisation de X dans L et $D \in \mathscr{V}(X)$ le support de (κ). On montre que D contient la ramification de ν.

Soit U un ouvert affine quelconque de $X - D$. Considérons la sous-variété affine V de $U \times \mathbf{C}$ définie par

$$V = \{(x, \zeta) \in U \times \mathbf{C} \mid \zeta^m = \kappa(x)\}. \tag{14}$$