§5. Application à la construction d'algèbres simples

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **30 (1984)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

où les homomorphismes verticaux sont induits par l'inclusion $X \subset \tilde{X}$, celui de gauche étant surjectif. Comme $\tilde{X}$ est compact, on peut appliquer le raisonnement ci-dessus à $\tilde{c}$. On en déduit que $\tilde{c}$ et donc c sont induits par la première classe de Chern. □

§ 5. APPLICATION À LA CONSTRUCTION D'ALGÈBRES SIMPLES

On a vu que pour un corps de fonctions complexes K et pour une variété algébrique lisse X avec $\mathbf{C}(X) = K$, on a la suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \xrightarrow{a} \chi(K) \xrightarrow{b} \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \xrightarrow{c} H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Problème 5.1. Soient $f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))$ un polynôme unitaire irréductible, ξ une racine de f engendrant l'extension K de $\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)$ et X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) = K$.

Etant donné $\delta \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $c(\delta) = 0$, on aimerait décrire tous les relevés de δ par b et les éléments de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_{n+1}))$ leur correspondant par l'isomorphisme (5).

On va résoudre ce problème en explicitant l'homomorphisme b (lemme 5.2 ci-dessous). Par contre, la méthode de calcul de a qu'on peut déduire de la démonstration du théorème 3.1 (point 4, avec $\Delta = \emptyset$) n'est pas très explicite. Nous comparerons les deux descriptions de $\mathrm{Im}\, a = \mathrm{Ker}\, b$ en fin de paragraphe.

LEMME 5.2. *Soit* $\varphi \in \chi(K)$. *Notons* $L = \bar{K}^{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ *et* θ *le générateur de* $\mathrm{Gal}(L/K)$ *tel que* $\varphi(\theta) = 1/m \in \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. *Soit* $\kappa \in K$ *tel que* $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$ *et* $\theta(\sqrt[m]{\kappa}) = e^{-2\pi i/m} \cdot \sqrt[m]{\kappa}$. *Alors* $b(\varphi) = (\kappa) \otimes 1/m \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, *où* (κ) *est le diviseur de* κ.

Démonstration. D'après la définition de b, il faut d'abord calculer l'image de φ dans $\varinjlim_{D \in \mathscr{V}(X)} H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ par l'isomorphisme F du théorème 3.1. On va voir qu'on peut représenter $F(\varphi)$ dans $H^1(X-D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ pour D le support du diviseur (κ), puis on va exprimer son représentant $\pi^*(\varphi)$ en terme de κ. Il faudra ensuite revenir à la démonstration du théorème 4.1 pour calculer $b(\varphi)$ à partir de $\pi^*(\varphi)$.

1) *Choix de* $D \in \mathscr{V}(X)$: Notons (Y, ν) la normalisation de X dans L et $D \in \mathscr{V}(X)$ le support de (κ). On montre que D contient la ramification de ν.

Soit U un ouvert affine quelconque de $X - D$. Considérons la sous-variété affine V de $U \times \mathbf{C}$ définie par

(14) $$V = \{(x, \zeta) \in U \times \mathbf{C} \mid \zeta^m = \kappa(x)\}.$$

L'anneau $\mathbf{C}[V] = (\mathbf{C}[U])[T]/(T^m - \kappa)$ est de type fini sur $\mathbf{C}[U]$ et $\mathbf{C}(V) = L$. De plus, V est lisse et donc normale. En effet, la première projection $p_1 : V \to U$ est un revêtement topologique non ramifié et U est lisse. Donc V est analytiquement (et par conséquent algébriquement) lisse. Ceci montre que (V, p_1) est isomorphe à la normalisation de U dans L et que ν est non ramifié au-dessus de U.

2) *Calcul de* $\pi^*(\varphi) \in H^1(X - D, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$: Notons $W = X - D, Z = Y - \nu^{-1}(D)$ et définissons comme en (8) $\pi : H_1(W) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(L/K)$. On va calculer explicitement $\pi^*(\varphi) \in \mathrm{Hom}(H_1(W), \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.

Considérons le diagramme commutatif

$$(15) \qquad \begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow{\lambda} & \mathbf{C}^{\bullet} & \ni & \zeta \\ \nu \downarrow & & e \downarrow & & \updownarrow \\ W & \xrightarrow{\kappa} & \mathbf{C}^{\bullet} & \ni & \zeta^m \end{array}$$

où $\lambda := \sqrt[m]{\kappa} \in L$. En utilisant l'orientation naturelle de $\mathbf{C}$, on identifie $H_1(\mathbf{C}^{\bullet})$ à $\frac{1}{m}\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$ et on définit $\psi : H_1(W) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ comme la composition

$$H_1(W) \xrightarrow{\kappa_*} H_1(\mathbf{C}^{\bullet}) = \frac{1}{m}\mathbf{Z} \twoheadrightarrow \frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\,.$$

On va voir que $\pi^*(\varphi) = \psi$.

On a $\mathrm{Ker}\psi = \nu_* H_1(Z)$. En effet, l'inclusion $\nu_* H_1(Z) \subset \mathrm{Ker}\psi$ est claire, car d'après (15), $\kappa_*(\nu_* H_1(Z)) = e_*(\lambda_* H_1(Z)) \subset m H_1(\mathbf{C}^{\bullet}) = \mathbf{Z}$. Réciproquement, soit $\omega \in \mathrm{Ker}\psi$, qu'on représente par un lacet l en un point $x \in W$, et soit $y \in \nu^{-1}(x)$. En remarquant que sur l'ouvert V de (14) λ coïncide avec la seconde projection $p_2 : V \to \mathbf{C}$, on voit que dans (15), λ est bijective sur les fibres. Ainsi, tout comme le relevé de $\kappa(l)$ en $\lambda(y)$ (par l'hypothèse $\omega \in \mathrm{Ker}\psi$), le relevé de l en y est un lacet et donc $\omega \in \nu_* H_1(Z)$.

Comme $\mathrm{Ker}(\pi^*(\varphi)) = \nu_* H_1(Z)$ également, on sait déjà que $\pi^*(\varphi)$ et ψ coïncident à un automorphisme de $\frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ près. Ils sont en fait égaux: en effet, en choisissant $\omega \in H_1(W)$ tel que $\psi(\omega) = 1/m$, on va montrer que $\pi(\omega) = \theta \in \mathrm{Gal}(L/K)$, d'où $\pi^*(\varphi) = \psi$, car $\varphi(\theta) = 1/m$. Soit l un lacet en x représentant ω et soit $y \in \nu^{-1}(x)$. Si l'on note σ l'automorphisme de Z induit par ω, c'est-à-dire l'image de ω par la surjection $H_1(W) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}_W(Z)$ de (7), le relevé $\tilde{l}$ de l joint y à $\sigma(y)$ et se projette sur $\lambda(\tilde{l})$ allant de $\lambda(y)$ à $\lambda(\sigma(y))$. D'autre part, $\lambda(\tilde{l})$ qui est le relevé de $\kappa(l)$ en $\lambda(y)$ a pour extrémité $e^{2\pi i/m} \cdot \lambda(y)$. Ainsi, d'après la définition de l'isomorphisme du corollaire 2.3, $\pi(\omega) = \theta \in \mathrm{Gal}(L/K)$, car $\pi(\omega)$ envoie λ sur $\lambda \circ \sigma^{-1} = e^{-2\pi i/m} \cdot \lambda = \theta(\lambda)$.

3) *Calcul de* $b(\varphi) \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$: Par définition, $b(\varphi)$ est représenté par $\beta^*(\pi^*(\varphi)) \in \bigoplus_{\Delta \in \mathscr{C}(D)} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\varepsilon_\Delta \hookrightarrow \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ où β^* est le dual de l'homomorphisme $\beta: H_0(D_r) \to H_1(X-D)$ de (11). Rappelons aussi que $\beta = \partial \circ \tau$, où ∂ est l'opérateur bord et τ l'isomorphisme de Thom (10).

Soit $\Delta \in \mathscr{C}(D)$, déterminant l'élément η_Δ de $H_0(D_r)$. Comme géométriquement $\tau(\eta_\Delta)$ peut être représenté par un petit disque transverse à Δ, $\beta(\eta_\Delta) = \partial(\tau(\eta_\Delta))$ peut l'être par un petit lacet l autour de Δ, dont l'orientation dépend des conventions. On les fixe maintenant de sorte que $\kappa(l)$ représente $\mathrm{ord}_\Delta(\kappa)$ fois le générateur naturel de $H_1(\mathbf{C}^\bullet)$. En utilisant que $\pi^*(\varphi) = \psi$ et que ε_Δ est le dual de η_Δ, on voit alors que $\beta^*(\pi^*(\varphi)) = \psi \circ \beta = \Sigma_{\Delta \in \mathscr{C}(D)}[\mathrm{ord}_\Delta(\kappa)/m]\varepsilon_\Delta$. Donc $b(\varphi) = (\kappa) \otimes 1/m \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. □

Solution du problème 5.1. Soit $f \in \mathscr{P}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))$ un polynôme unitaire irréductible, ξ une racine de f engendrant l'extension K de $\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n)$ et X une variété algébrique lisse avec $\mathbf{C}(X) = K$. Soit $\delta \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $c(\delta) = 0$ dans $H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Alors toutes les classes d'algèbres simples centrales sur $\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_{n+1})$ correspondant à des relevés de δ dans $\chi(K)$ s'obtiennent de la façon suivante:

Comme $c(\delta) = 0$, δ est dans l'image de b. Par le lemme 5.2, il s'écrit donc (de plusieurs manières!) $\delta = (\kappa) \otimes 1/m$, où (κ) est le diviseur de $\kappa \in K$. Choisissons une écriture $\delta = (\kappa) \otimes 1/m$ qu'on peut supposer réduite, i.e. telle que si $(\kappa) = k \cdot (\kappa')$ et $k \mid m$, alors $k = 1$. Ce choix détermine un relevé $\varphi \in \chi(K)$ de δ. En effet, $L := K(\sqrt[m]{\kappa})$ est une extension cyclique de degré m de K et si θ est le générateur de $\mathrm{Gal}(L/K)$ tel que $\theta(\sqrt[m]{\kappa}) = e^{-2\pi i/m} \cdot \sqrt[m]{\kappa}$, on peut définir $\varphi: \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ par $\varphi(\theta) = 1/m$. Le lemme 5.2 montre que $b(\varphi) = \delta$. Par la remarque 1.2, il correspond à φ dans $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_{n+1}))$ la classe d'algèbres simples $\mathrm{cor}(L(t_{n+1})/K(t_{n+1}), \theta, t_{n+1} - \xi)$, où $\mathrm{cor}: \mathrm{Br}(K(t_{n+1})) \to \mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_{n+1}))$ est la corestriction.

Remarque 5.3. Dans le cas où X est projective, on peut voir directement que $\delta \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ s'écrit $\delta = (\kappa) \otimes 1/m$ lorsque $c(\delta) = 0$. En effet, en écrivant $\delta = D \otimes 1/m$ avec $D \in \mathrm{Div}(X)$, on va montrer comment obtenir un diviseur principal en ajoutant à D un diviseur multiple de m. Mais faisons d'abord quelques rappels (voir [3, § 6; 11]).

(i) On peut définir c_1 comme l'homomorphisme de connexion $c_1: H^1(X, \mathcal{O}^*) \to H^2(X, \mathbf{Z})$ de la suite exacte de cohomologie associée à la suite exacte de l'exponentielle $0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 1$, où $\mathcal{O}$, resp. $\mathcal{O}^*$, est le faisceau des germes de fonctions holomorphes, resp. holomorphes non nulles, sur X.

(ii) Considérons $\rho: H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathbf{R})$ induit par l'inclusion $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ et notons $H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R})$ le sous-espace de $H^2(X, \mathbf{R})$ des classes représentables par des formes différentielles de type (1, 1) (via l'isomorphisme de de Rham $H^2(X, \mathbf{R}) \simeq H^2_{DR}(X)$). On a alors l'égalité

$$c_1\big(H^1(X, \mathcal{O}^*)\big) = \rho^{-1}\big(H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R})\big)$$

entre sous-groupes de $H^2(X, \mathbf{Z})$.

(iii) Comme X est projective, $H^1(X, \mathcal{O}^*)$ est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de X. En faisant l'abus de noter (comme précédemment) $c_1: \mathrm{Div}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$, on déduit $c_1\big(\mathrm{Div}(X)\big) = \rho^{-1}\big(H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R})\big)$ de (ii).

Démonstration de la remarque 5.3.

1) Soit $\delta = D \otimes 1/m \in \mathrm{Div}(X) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $c(\delta) = 0$. On montre qu'on peut supposer $c_1(D) = 0$.

L'hypothèse $c(\delta) = 0 \in H^2(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ signifie que $c_1(D)$ est divisible par m dans $\mathrm{Hom}\big(H_2(X), \mathbf{Z}\big)$. Quitte à amplifier $D \otimes 1/m$ (i.e. multiplier D et m par un même entier), on peut supposer $c_1(D)$ divisible par m dans $H^2(X, \mathbf{Z})$, car $\mathrm{Ker}\{H^2(X, \mathbf{Z}) \to \mathrm{Hom}\big(H_2(X), \mathbf{Z}\big)\}$ est de torsion.

On a donc $c_1(D) = m \cdot \eta$, pour $\eta \in H^2(X, \mathbf{Z})$. D'après (iii), $\rho(\eta) = \frac{1}{m} \cdot \rho\big(c_1(D)\big)$ est dans l'espace $H^2_{(1,1)}(X, \mathbf{R})$ et il existe un diviseur D' tel que $\eta = c_1(D')$. On peut donc écrire $\delta = (D - mD') \otimes 1/m$ avec $c_1(D - mD') = 0$.

2) Supposons $\delta = D \otimes 1/m$ avec $c_1(D) = 0$. On veut modifier D en un diviseur principal. D'après (i), c_1 s'insère dans la suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathbf{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}) \to H^1(X, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbf{Z}).$$

En utilisant (iii), on voit ainsi que le groupe des classes de diviseurs dont la première classe de Chern est nulle est isomorphe au groupe $H^1(X, \mathcal{O})/H^1(X, \mathbf{Z})$ qui est divisible. Donc il existe un diviseur D' tel que D est linéairement équivalent à mD'; autrement dit $D - mD'$ est principal. □

Remarque 5.4. Le sous-groupe $\mathrm{Im}a = \mathrm{Ker}b$ de $\chi(K)$ est isomorphe au groupe des classes de diviseurs de torsion.

En effet, si $\varphi \in \mathrm{Ker}b$, on peut regarder φ comme un relevé par b de $\delta = 0$, provenant d'une écriture réduite $0 = (\kappa) \otimes 1/m$. On en déduit que $(\kappa) = m \cdot D$ pour un diviseur D dont la classe $[D]$ est d'ordre m. On vérifie facilement que la correspondance $\varphi \mapsto [D]$ donne l'isomorphisme annoncé en remarquant que deux écritures réduites $(\kappa) \otimes 1/m$ et $(\kappa') \otimes 1/m'$

déterminent le même élément de $\chi(K)$ si et seulement si $m' = m$ et κ' diffère de κ par une puissance m-ième.

On peut aussi faire le lien avec l'homomorphisme a. Soit $\psi \in H^1(X, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. On calcule $a(\psi) \in \chi(K)$ par la méthode de la démonstration du théorème 3.1 (point 4). Si m est l'ordre de ψ, on construit un morphisme algébrique fini $\nu: Y \to X$ qui est un revêtement topologique non ramifié ($\Delta = \emptyset$) à m feuillets. Le corps $L := \mathbf{C}(Y)$ est une extension cyclique de degré m de K et $a(\psi) \in \chi(K)$ provient d'un isomorphisme $\mathrm{Gal}(L/K) \xrightarrow{\sim} \frac{1}{m}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ induit par ψ. Si $\kappa \in K$ est tel que $L = K(\sqrt[m]{\kappa})$, en utilisant cette fois que ν est non ramifié, on peut montrer que $(\kappa) = m \cdot D$ pour un diviseur D dont la classe $[D]$ est d'ordre m.

Remarquons pour terminer que cette construction ne fournit pas une description des classes de diviseurs de torsion (qu'il serait certainement très intéressant d'avoir !).

§ 6. Divisibilité de $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))$

Auslander et Brumer ont prouvé [1] que si F est un corps de fractions rationnelles à une variable à coefficients dans un corps quelconque, alors soit $\mathrm{Br}(F)$ contient un sous-groupe divisible non trivial, soit $2 \cdot \mathrm{Br}(F) = 0$ (voir aussi [2]). On va montrer que pour tout n, $\mathrm{Br}(\mathbf{C}(t_1, \ldots, t_n))$ est entièrement divisible.

Pour tout corps de fonctions complexes K, on va établir que le groupe $\chi(K)$ est divisible en appliquant le théorème 4.1 à un modèle particulier X de K : on va choisir une variété algébrique lisse X avec $\mathbf{C}(X) = K$ telle que $H_1(X)$ soit libre. (Il serait aussi possible de raisonner directement sur $\chi(K)$ en séparant chaque composante p-primaire.)

Pour démontrer l'existence d'un modèle adéquat de K, on aura besoin de deux propriétés élémentaires de la première classe de Chern

$$c_1 : \mathrm{Div}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$$

que l'on établit immédiatement.

LEMME 6.1. *Soit X une variété algébrique projective complexe lisse. Alors (i) l'image $c_1(\mathrm{Div}(X))$ de c_1 contient le sous-groupe de torsion* $\mathrm{Tors}(H^2(X, \mathbf{Z}))$ *et (ii) on a une décomposition $H_2(X) = N \oplus L$, où N est le sous-groupe de $H_2(X)$ annulé par l'évaluation de $c_1(\mathrm{Div}(X))$ et où L est libre.*