Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 30 (1984)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE J. MILNOR SUR LE NOMBRE GORDIEN DES NŒUDS ALGÉBRIQUES

Autor: Boileau, Michel / Weber, Claude

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-53827

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 30 (1984), p. 173-222

LE PROBLÈME DE J. MILNOR SUR LE NOMBRE GORDIEN DES NŒUDS ALGÉBRIQUES [1])

par Michel BOILEAU et Claude WEBER

INTRODUCTION

Cet article tente de faire le point sur deux conjectures célèbres et toujours ouvertes, celles dites de R. Thom et J. Milnor. Elles sont attirantes, car elles relient de façon spectaculaire la géométrie algébrique et la topologie en petites dimensions.

En ce qui concerne la topologie, nous avons particulièrement mis l'accent sur la théorie des entrelacs, plutôt que sur la théorie des nœuds (connexes). Il y a à cela au moins deux raisons: tout d'abord ce sont les entrelacs qui sont vraiment liés au sujet et d'autre part, selon le précepte de L. Siebenmann, la théorie des entrelacs est indissociable de celle des nœuds. Ceci entraîne parfois quelques complications.

Les trois premiers paragraphes de cet article sont essentiellement de la mise en place de choses connues.

Au § 4 nous donnons une démonstration simple du théorème de H. Pinkham qui majore le nombre gordien des entrelacs algébriques. Cette démonstration a été obtenue en collaboration avec D. Bennequin.

Au § 5 nous donnons une preuve des inégalités de H. Wendt dans le cas des entrelacs et discutons certaines minorations classiques du nombre gordien. Pour cela nous introduisons le « grand genre » de Murasugi, concept commode pour minorer le nombre gordien d'un entrelacs.

Au § 6 nous généralisons un peu les théorèmes de A. Tristam sur les signatures des entrelacs. Ces théorèmes permettent de trouver des bornes pour la conjecture de R. Thom qui sont exactement celles données par V. Rohlin d'une part et par W. C. Hsiang et R. Szczarba d'autre part, en utilisant le théorème de la G-signature d'Atiyah-Singer. Qu'une telle voie soit théoriquement possible était connu de T. Matumoto et O. Viro. Voir aussi V. A. Nezhinskii [Ne] et S. A. Popov [Po].

---

[1]) Cet article a déjà paru dans *Nœuds, tresses et singularités*, Monographie de l'Enseignement Mathématique N° 31, Genève 1983, p. 49-98.

Les détails de plusieurs démonstrations se trouvent dans le manuscrit multicopié [BW], du même titre que cet article.

Nous tenons à remercier Daniel Bennequin, Lê Dung Trang et Françoise Michel des nombreuses discussions que nous avons eues sur les sujets traités ici. L'enthousiasme de Lê pour la conjecture de J. Milnor est très contagieux!

Le plan de cet article est le suivant:

§ 1. Genre des courbes planes et conjecture de R. Thom.

§ 2. Genres de Murasugi et de Seifert des entrelacs.

§ 3. Nombre gordien des entrelacs.

§ 4. Le problème de Milnor.

§ 5. Relations entre le nombre gordien et d'autres invariants de la théorie des entrelacs.

§ 6. Signatures.

§ 7. Quelques problèmes liés au nombre gordien.

§ 1. Genre des courbes planes et conjecture de R. Thom

Soit C une courbe algébrique dans $\mathbf{CP}^2$, irréductible. Il existe donc un polynome homogène $F(X, Y, Z)$ irréductible, tel que C est constituée par les zéros de F. Par définition le degré de C est le degré du polynome F.

Supposons C lisse. Alors, du point de vue différentiable, C est une surface close, connexe, orientée. Elle a un genre topologique g et une version du théorème de Riemann-Roch (connue aussi sous le nom de théorème de Plücker) affirme que: $2g = (d-1)(d-2)$.

Références: W. Fulton [Fu]; R. Walker [Wak].

En fait ce théorème se trouve dans quasiment tous les livres sur les courbes planes.

Par le théorème de Bezout, le degré d peut être interprété topologiquement en disant que la classe fondamentale $[C] \in H_2(C; \mathbf{Z})$ est homologue dans $\mathbf{CP}^2$ à d fois la classe représentée par le générateur canonique $\mathbf{CP}^1 \hookrightarrow \mathbf{CP}^2$. On a toujours $d > 0$. Ceci justifie la définition qui suit.

Soit F une surface topologique dans $\mathbf{CP}^2$. Supposons F close, connexe, orientée. On dira que F est de degré d si la classe fondamentale $[F]$ est homologue dans $\mathbf{CP}^2$ à d fois $[\mathbf{CP}^1]$. Quitte à changer l'orientation de F, nous supposerons toujours $d \geqslant 0$.

Ceci étant précisé, nous pouvons énoncer la

CONJECTURE DE R. THOM. *Soit F une surface différentiable, close, connexe, orientée dans* $\mathbf{CP}^2$. *Supposons que F est de degré $d > 0$. Alors le genre de F est supérieur ou égal à* $\dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$.

Commentaires. 1) Contrairement à la formule de Plücker -Riemann-Roch, on ne peut pas s'attendre à une égalité. En effet, si on change F en $F \# T^2$, où T^2 désigne le tore $S^1 \times S^1$ et où $\#$ désigne une somme connexe, on voit que le degré ne change pas tandis que le genre augmente d'une unité.

2) La conjecture est fausse si on demande seulement que F soit plongée topologiquement (ou P.L.). En fait M. Kervaire et J. Milnor [KM] ont montré que, pour tout $d \geqslant 0$, il existe une sphère P.L., localement plate sauf en un point, qui est de degré d.

3) Bien sûr, pour tout $d \geqslant 1$, il existe une courbe algébrique lisse de degré d. Par exemple celle correspondant au polynome $x^d + y^d + z^d = 0$.

4) Un cas très particulier de la conjecture affirme qu'une sphère différentiable S^2 dans $\mathbf{CP}^2$ est de degré plus petit ou égal à 2. La question de savoir quels éléments de $H_2(M; \mathbf{Z})$ peuvent être représentés par une sphère différentiable a été étudiée pour la première fois par Kervaire-Milnor. (M est une variété différentiable de dimension 4, simplement connexe). Le cas particulier de $\mathbf{CP}^2$ a été résolu par A. Tristam. (Voir le § 6; nous verrons que seules les classes de degré $\leqslant 2$ peuvent être représentées par une S^2 différentiable.)

Envisageons maintenant la situation où C n'est pas nécessairement lisse. En ce cas, la théorie locale des singularités nous permet de décrire C de la façon suivante:

a) L'ensemble Σ des points singuliers de C est fini.

b) Pour chaque point singulier $z \in \Sigma$, il existe une petite boule D_z de dimension réelle 4, centrée en z telle que:

   i) ∂D_z rencontre C transversalement

   ii) $D_z \cap \Sigma = \{z\}$

   iii) la paire $(D_z, D_z \cap C)$ est homéomorphe au cône de centre z sur la paire $(\partial D_z, \partial D_z \cap C)$.

Comme l'intersection est transverse, $\partial D_z \cap C$ constitue un entrelacs orienté dans ∂D_z. Notons r_z le nombre de composantes connexes de cet entrelacs. Par définition, le nœud ou entrelacs L_z est un entrelacs algébrique, à ne pas confondre avec les entrelacs algébriques de F. Bonahon et L. Siebenmann pour qui l'adjectif algébrique a une autre signification.

Soit $\check{C} = C \cap (\mathbf{CP}^2 - \bigcup_{z \in \Sigma} \mathring{D}_z)$.

$\check{C}$ est une surface différentiable (en fait **C**-analytique) connexe (car C est irréductible), orientée (par l'orientation venant des complexes), à bord. Le nombre de composantes connexes du bord $\partial\check{C}$ est égal à $\sum_{z\in\Sigma} r_z$.

Par définition, le genre topologique g de C est égal au genre de la surface $\bar{C}$ obtenue en attachant un disque de dimension 2 à chaque composante de $\partial\check{C}$.

La formule de Riemann-Roch dans le cas d'une courbe avec singularités dit alors que:

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} = g + \sum_{z\in\Sigma} \delta_z$$

(nous rappellerons la définition de δ_z un peu plus loin).

Références: J. P. Serre [Ser]; P. Samuel [Sam].

Quelques commentaires sur les objets topologiques.

Un entrelacs orienté est la donnée d'une famille finie de courbes différentiables orientées, plongée dans S^3 (ou $\mathbf{R}^3$). Un nœud est un entrelacs à une composante.

Deux tels entrelacs sont équivalents s'il existe un homéomorphisme de S^3, de degré $+1$, envoyant l'un des entrelacs sur l'autre, en conservant les orientations de chaque composante.

Dans notre cas les entrelacs algébriques L_z sont orientés par l'orientation complexe du morceau de courbe algébrique $D_z \cap C$, dont L_z est le bord.

Pour éviter chaque fois de longues périphrases, définissons le genre d'une surface de la façon suivante:

Soit G une surface compacte orientable. Soient $G_1, G_2, ..., G_s$ les composantes connexes de G. Soit $\overline{G_i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, la surface close obtenue à partir de G_i en attachant un disque sur chaque composante connexe de ∂G_i. Alors par définition, le genre de G est la somme des genres des $\overline{G_i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$. C'est aussi le genre de la somme connexe des G_i (ou des $\overline{G_i}$).

Commentaires sur δ_z.

On définit δ_z en géométrie algébrique de la façon suivante: on considère l'anneau local en z: $\mathcal{O}_z$ et sa clôture intégrale $\mathcal{O}'_z \supset \mathcal{O}_z$. Alors, par définition:

$$\delta_z = \dim_{\mathbf{C}} \frac{\mathcal{O}'_z}{\mathcal{O}_z}.$$

Nous allons nous intéresser maintenant à une interprétation topologique de l'entier δ_z donnée par J. Milnor.

A l'aide d'une carte affine contenant la boule D_z nous pouvons supposer que nous avons une fonction polynomiale $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$, avec $f(0) = 0$, et que 0 est une singularité isolée de f.

Finalement, pour une petite boule D centrée en $0 \in \mathbf{C}^2$, nous pouvons supposer que la paire $(D, D \cap f^{-1}(0))$ est isomorphe, via la carte, à la paire $(D_z, D_z \cap C)$.

Alors, pour t suffisamment proche de 0, $f^{-1}(t) \cap \partial D$ est un entrelacs équivalent à L_z. Cet entrelacs orienté K borde dans D le morceau de courbe lisse $f^{-1}(t) \cap D = X_t = X$.

Rappelons que, pour t et t', non nuls, suffisamment proches de 0, les paires (D, X_t) et $(D, X_{t'})$ sont difféomorphes.

Référence: J. Milnor [Mi_1].

Comme J. Milnor, notons μ l'entier $\dim_{\mathbf{Z}} H_1(X; \mathbf{Z})$. J. Milnor démontre que l'on a nécessairement:

$$2\delta = \mu + r - 1$$

Il est important pour la compréhension de cet article d'avoir une idée de la démonstration de la formule de Milnor. Nous en donnons donc une esquisse.

Cas particulier: supposons que Σ est réduit à un seul point, noté z.

Comme les entrelacs L_z et K ont même type, il est facile de construire une surface différentiable F dans $\mathbf{CP}^2$ en recollant $\check{C}$ avec X. F est une surface close, connexe et orientée.

Alors, un calcul facile, qui utilise que $\check{C}$ et X sont toutes deux connexes, montre que:

$$\text{genre de } F = \text{genre de } C + \frac{1}{2}(\mu + r - 1)$$

Milnor montre alors qu'il y a une courbe lisse C', isotope à F. Ceci est une conséquence du fait que nous avons supposé Σ réduit à un point.

Par construction, on a:

$$\text{genre de } F = \text{genre de } C' = g'$$

et

$$\text{degré de } C = \text{degré de } F = \text{degré de } C' = d\,.$$

Par Riemann-Roch: $\dfrac{(d-1)(d-2)}{2} = g'$ et $\dfrac{(d-1)(d-2)}{2} = g + \delta$.

Le calcul du genre de F montre alors que $\delta = \dfrac{1}{2}(\mu + r - 1)$.

Finalement, Milnor donne dans son livre un argument pour se ramener au cas particulier (voir [Mi_1], p. 88 à 91). Plus précisément, il montre que tout germe est équivalent à droite à un germe satisfaisant les conditions du cas particulier.

Nous donnerons au § 4 une interprétation (classique) de δ_z en termes de « points doubles proches ».

Au § 5 nous donnerons une autre notion de genre d'une surface, que nous appellerons le grand genre. Elle permet de bien voir pourquoi δ est la contribution locale au genre de C'.

§ 2. Genres de Murasugi et de Seifert des entrelacs

Soit K un entrelacs orienté dans S^3. Il est bien connu depuis H. Seifert qu'il existe des surfaces compactes orientées $U \subset S^3$, dont le bord orienté est K. Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que U n'a aucune composante connexe close. U est appelée une surface de Seifert de K.

Le genre de Seifert de K, noté $s(K)$, est le minimum des genres des surfaces de Seifert de K.

Nous allons maintenant nous intéresser aux entrelacs orientés qui sont fibrés.

Références: J. Hillman [Hi]; D. Rolfsen [Ro_1].

Les faits suivants sur les entrelacs fibrés sont classiques:

a) Les entrelacs algébriques sont fibrés. (C'est le théorème de Milnor, voir [Mi_1]).

b) Les surfaces de Seifert d'un entrelacs fibré sont toutes connexes. En voici brièvement la raison: l'homologie en dimension 1 du revêtement cyclique infini associé à l'orientation de l'entrelacs est de type fini sur $\mathbf{Z}$, puisque ce revêtement a le type d'homotopie de la fibre; s'il existe une surface de Seifert non connexe, l'homologie en question n'est pas de type fini.

c) N'importe quelle surface de Seifert de K, de genre minimum, est isotope à une fibre de la fibration. Cela résulte essentiellement de la démonstration du théorème de fibration de J. Stallings (cf. [St_1]). (Si on veut que l'isotopie reste fixe sur le bord, il faut utiliser F. Waldhausen [Wad].)

d) Milnor démontre dans son théorème de fibration que, si L est un entrelacs algébrique, la fibre de la fibration est difféomorphe au morceau de courbe algébrique que nous avons appelé X au § 1. Par définition,

$$\dim_{\mathbf{Z}} H_1(X\,;\mathbf{Z}) = \mu$$

et donc, en vertu de c), $s(L) = \frac{1}{2}[\mu - (r-1)]$ pour n'importe quel entrelacs algébrique L.

Considérons maintenant S^3 comme le bord de la boule B^4. Bien sûr, il existe des surfaces compactes orientées $V \subset B^4$ telles que le bord orienté de V soit égal à un entrelacs orienté donné. A nouveau on impose qu'aucune composante connexe de V ne soit close. Pour faire joli, on peut toujours supposer que V est plongée proprement dans B^4, c'est-à-dire que $\partial V = V \cap S^3$.

Une surface telle que V est appelée surface de Murasugi de l'entrelacs orienté donné. Par définition, le genre de Murasugi est le minimum du genre des surfaces de Murasugi de l'entrelacs K. Nous le noterons $m(K)$.

Evidemment, $m(K) \leqslant s(K)$ puisque toute surface de Seifert est une surface de Murasugi.

Référence originale: K. Murasugi [Mu].

Commentaires. 1) Si K est un nœud ($r = 1$), les genres que nous avons définis de dépendent pas de l'orientation. Plus généralement si on remplace l'entrelacs orienté K par l'entrelacs K' obtenu en changeant les orientations de toutes les composantes de K, alors K et K' ont mêmes genres de Seifert, respectivement de Murasugi. Cependant si on fait d'autres modifications sur les orientations, en général les genres changent.

2) Il est très facile de trouver des exemples où l'inégalité $m(K) \leqslant s(K)$ est stricte. Pensez, par exemple, aux nœuds cobordants à zéro.

Une première relation entre le genre de Murasugi des entrelacs algébriques et la conjecture de Thom est donnée par la proposition suivante:

PROPOSITION. *Supposons qu'il existe un entrelacs algébrique K avec $m(K) < s(K)$. Alors la conjecture de Thom est fausse.*

D'où la conjecture (anonyme à ce qu'il nous semble (cf. [Kir, pb. 1.40]): « pour tous les entrelacs algébriques K, on a $m(K) = s(K)$ ».

Preuve de la proposition. Soit $f : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ une fonction polynomiale avec $f(0) = 0$, possédant en 0 une singularité isolée, et dont l'entrelacs algébrique correspondant est équivalent à K.

Soit C la courbe projective plane obtenue en homogénéisant f. D'après l'argument donné par J. Milnor dans son livre [Mi_1, p. 89] (et en utilisant le théorème de J. Mather) on peut supposer que C est irréductible. Soit d son degré.

L'argument de Milnor que nous avons reproduit à la fin du § 1 montre que la surface différentiable $F \subset \mathbf{CP}^2$, obtenue en ajoutant à $\check{C}$ les morceaux de surface « de type X » au voisinage de chaque point singulier a un genre g donné par la formule: $2g = (d-1)(d-2)$.

Si K a, en vertu de l'hypothèse, un genre de Murasugi strictement plus petit que son genre de Seifert, choisissons une surface de Murasugi V réalisant le minimum du genre.

Construisons une surface différentiable $F' \subset \mathbf{CP}^2$ en remplaçant, au voisinage de l'origine, le morceau de surface X par V. Le degré de F' est égal au degré de F. Mais le genre de F' est strictement plus petit que le genre de F. La surface F' serait donc un contre-exemple à la conjecture de Thom.

Nous donnons maintenant une autre relation classique entre la conjecture de Thom et le genre de Murasugi des entrelacs.

Soit un entier $r \geqslant 1$. Considérons le tore standard T dans S^3, et une courbe fermée simple γ sur T de type (1, 1). Considérons l'entrelacs Γ obtenu en dessinant sur T r courbes parallèles à γ : $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$. Orientons γ arbitrairement mais de façon définitive. Orientons chaque γ_i arbitrairement. Pour chaque entier i, avec $1 \leqslant i \leqslant r$, γ_i est homologue sur T à $\varepsilon_i\gamma$, où $\varepsilon_i = \pm 1$. Posons $d = \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i$. Nous ne restreindrons pas la généralité de ce qui va suivre en supposant $d \geqslant 0$.

Bien sûr, $r \equiv d \bmod 2$. Nous noterons $\Gamma(r, d)$ l'un des entrelacs orientés ainsi obtenu. Ce sont des entrelacs de Hopf généralisés.

Un cas particulier intéressant est l'entrelacs $\Gamma(d, d)$. Il s'agit de l'entrelacs orienté associé à la singularité $x^d - y^d = 0$. (Point d-uple ordinaire.)

PROPOSITION. *La conjecture de Thom est vraie si et seulement si le genre de Murasugi des entrelacs de Hopf généralisés* $\Gamma(r, d)$ *est égal à*

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2},$$

pour tout r *et pour tout* d.

Remarque. Il n'est pas difficile de montrer que $m(\Gamma(r, d)) \leqslant \dfrac{(d-1)(d-2)}{2}$ et que $m(\Gamma(r, d)) \leqslant m(\Gamma(d, d))$.

Il serait agréable de montrer que $m(\Gamma(r, d)) = m(\Gamma(d, d))$. Dans ces conditions la proposition deviendrait : la conjecture de Thom est vraie si et seulement si

$$m(\Gamma(d, d)) = \frac{(d-1)(d-2)}{2} \qquad \text{pour tout } d \geqslant 1.$$

Preuve de la proposition. C'est une conséquence facile de la topologie de $\mathbf{CP}^2$. Rappelons que si F est une surface différentiable close, connexe, orientée dans $\mathbf{CP}^2$, plus généralement un 2-cycle entier, son degré est obtenu en calculant le nombre d'intersection $F \cdot \mathbf{CP}^1$. A l'aide d'une petite isotopie on peut toujours supposer que F rencontre $\mathbf{CP}^1$ transversalement.

Désignons par $\pi : E \to \mathbf{CP}^1$ le fibré en disques de dimension 2, normal à $\mathbf{CP}^1$ dans $\mathbf{CP}^2$. L'intersection $F \cap E$ se compose en général de r fibres orientées (par l'orientation de F) : $B_1, B_2, \ldots, B_r$. Comme le fibré E est orienté, pour chaque entier i, $1 \leqslant i \leqslant r$, posons $n_i = +1$ si l'orientation de B_i coïncide avec celle de E et posons $n_i = -1$ sinon. On note alors $\sum_{i=1}^{r} n_i = d$.

D'autre part, $(\mathbf{CP}^2 - \mathring{E})$ est une boule de dimension 4, que nous notons B^4. Alors, $S^3 = \partial B^4 = \partial E$.

Posons $F' = F \cap (\mathbf{CP}^2 - \mathring{E}) = F \cap B^4$. Le bord de F', $\partial F' \subset \partial E = S^3$, est une entrelacs orienté à r composantes. La description usuelle de la fibration de Hopf montre que c'est un entrelacs $\Gamma(r, d)$.

A partir de ces observations la fin de la démonstration est immédiate, si on remarque que F' est une surface de Murasugi pour cet entrelacs.

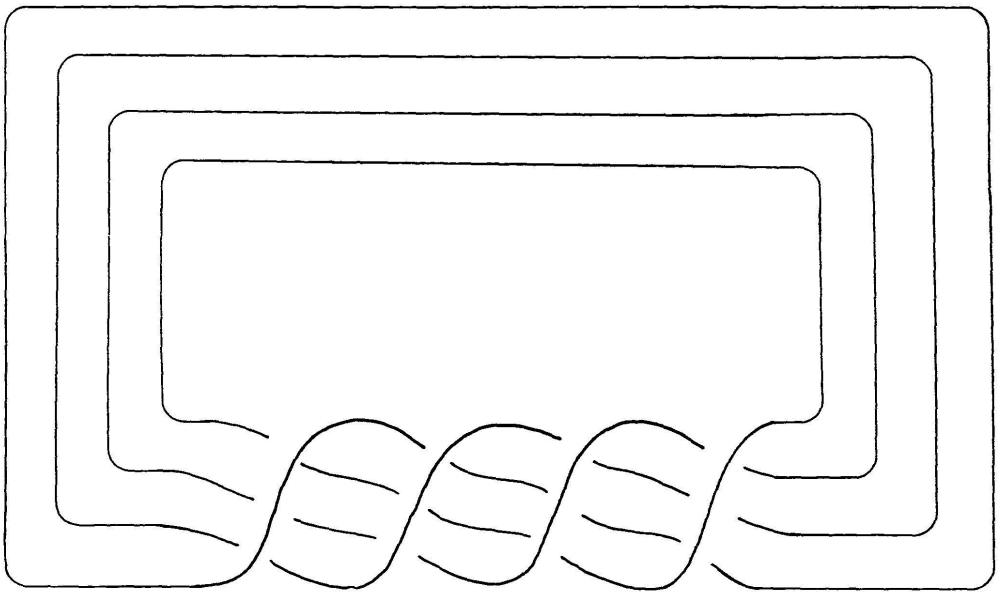


FIGURE 1

Entrelacs de Hopf généralisé (non orienté) à $r = 4$ composantes connexes.

Remarque. Les entrelacs $\Gamma(r, d)$ sont bien faciles à dessiner. Plaçons nous dans le groupe des tresses à r brins B_r, et considérons l'élément

$$\alpha = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \ldots \cdot \sigma_{r-1},$$

puis l'élément $\beta = \alpha^r$. Sans les orientations, l'entrelacs de Hopf généralisé Γ correspond à la tresse fermée $\hat{\beta}$. Pour $r = 1$ on a un cercle non noué et pour $r = 2$ on a l'entrelacs de Hopf usuel. (Voir la figure 1 dans le cas $r = 4$.)

Avec une description aussi explicite, il est frappant que $m(\Gamma(r, d))$ ne soit pas connu. Le § 6 fait le point sur ce que l'on sait actuellement.

§ 3. Nombre gordien des entrelacs

Dans ce paragraphe, nous abandonnons la géométrie algébrique plane, pour nous intéresser à un vieil invariant de la théorie des nœuds, aussi appelé « Uberschneidungszahl » ou « unknotting number ». Commençons par la définition originale, légèrement mise au goût du jour.

Soit S_r l'union disjointe de r cercles: $S_r = \coprod_{i=1}^{r} S_i^1$. *Une immersion*

$$\varphi : S_r \hookrightarrow \mathbf{R}^2$$

sera dite générique, si ses seules singularités sont des points doubles où les deux brins se coupent transversalement.

Une immersion générique sera dite signée si, en chaque point double, on a choisi un brin positif et un brin négatif. Expliquons-nous: traditionnellement le brin positif est dessiné par un trait plein et le brin négatif est dessiné par un trait brisé.

Soit K un entrelacs dans $\mathbf{R}^3$. Soit $\mathbf{R}^2$ un plan dans $\mathbf{R}^3$ et choisissons une orientation de la normale au plan. La projection orthogonale $\pi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ est une bonne projection pour K, si $\pi \mid K$ est une immersion générique. Une telle immersion est signée de façon naturelle, le brin positif en un point double étant celui qui se trouve le plus haut. Ceci a un sens puisque nous avons choisi une orientation de la normale au plan.

Réciproquement, une immersion signée détermine un entrelacs dans $\mathbf{R}^3$, dont la classe d'équivalence est bien définie. Nous dirons que cet entrelacs se trouve au-dessus de l'immersion signée.

Lemme. *Soit* $\varphi : S_r \hookrightarrow \mathbf{R}^2$ *une immersion générique. Alors, il existe un choix des signes aux points doubles tel que l'entrelacs qui se trouve au-dessus de*

l'immersion signée correspondante soit trivial, c'est-à-dire constitué de r cercles situés dans r plans parallèles.

Preuve du lemme.

a) Décidons que la composante de l'entrelacs qui se trouvera au dessus de $\varphi(S_1^1)$ sera au dessus de toutes les autres composantes. Pour cela, chaque fois qu'un point double de φ fait intervenir un brin de S_1^1 et un brin de S_j^1, pour $j \neq 1$, donnons le signe $+$ au brin de S_1^1.

b) Rendons la composante de l'entrelacs qui se trouve au dessus de $\varphi(S_1^1)$ non nouée.

Pour cela, choisissons un point-base $*$ sur S_1^1, dont l'image par φ n'est pas un point double. Orientons S_1^1, et parcourons S_1^1 à partir de $*$, dans le sens donné par l'orientation.

Soit $P_1 \in S_1^1$, le premier point double de $\varphi \mid S_1^1$ que nous rencontrons. Il existe donc $P'_1 \in S_1^1$, $P'_1 \neq P_1$, tel que $\varphi(P_1) = \varphi(P'_1)$. Attribuons à P_1 le signe $+$ et à P'_1 le signe $-$. Nous procédons de même avec le prochain point double de $\varphi \mid S_1^1$, sans signe, que nous rencontrons: nous lui attribuons le signe $+$ et le signe $-$ va à son jumeau, et ainsi de suite.

Le nœud qui va se trouver au dessus de $\varphi(S_1^1)$ est trivial! La raison est que la restriction de la projection π à ce nœud possède un seul minimum, au point qui se trouve au dessus de $\varphi(*)$. (Un nœud à 1 pont est trivial.)

Traditionnellement le nœud que nous venons de construire s'appelle le nœud descendant au-dessus de $\varphi(S_1^1)$.

c) Nous décidons que la composante qui se trouvera au-dessus de $\varphi(S_2^1)$ sera dans $\mathbf{R}^3$, au-dessus de celles correspondant à $\varphi(S_j^1)$, $j \geqslant 3$. Nous procédons de façon analogue au point a).

d) Nous rendons triviale la composante qui se trouve au-dessus de $\varphi(S_2^1)$. Nous procédons comme au point b).

e) Nous continuons de façon analogue avec chaque composante, l'une après l'autre, de l'entrelacs.

Soient, à nouveau, K un entrelacs dans $\mathbf{R}^3$ et π une bonne projection de K. Le lemme précédent montre qu'en faisant un nombre fini de changements de signes aux points doubles, on peut transformer K en l'entrelacs trivial. Par définition, le nombre gordien de la projection π est le minimum des changements de signes nécessaires pour « trivialiser » K.

Définition 1. Le nombre gordien $u(K)$ de K est le minimum des nombres gordiens de toutes les bonnes projections de K.

Note. Pour faire bonne mesure, précisons que nous laissons K varier dans sa classe d'équivalence. Ainsi, il est clair que le nombre gordien est un invariant de la classe d'équivalence de K. Il est clair aussi que nous n'avons pas du tout besoin d'orienter K, de sorte qu'il s'agit de la classe d'équivalence non orientée.

Remarque. Dans la démonstration du lemme que nous avons donnée, rien ne nous obligeait à décider arbitrairement que la première composante devait se trouver au-dessus des autres. De même, nous aurions pu choisir le nœud montant plutôt que le nœud descendant. En procédant alors de façon plus économique, on montre facilement que, si la bonne projection π possède l points doubles, le nombre gordien de π est plus petit ou égal à $l/2$.

Si $r = 1$, on peut obtenir un petit peu mieux.

Cette remarque indique de façon (un peu vague) que dans la détermination du nombre gordien, la principale difficulté consiste à trouver des minorations de $u(K)$.

Note historique. Sans doute, le nombre gordien a fait partie pendant longtemps des invariants numériques un peu folkloriques de la théorie des nœuds. Voir, par exemple, ce qu'en dit K. Reidemeister dans son livre [Re], page 16-17. La première contribution non banale au sujet fut celle de H. Wendt [We] qui donna une minoration du gordien dont nous parlerons plus tard au § 5.

Pour pouvoir étudier convenablement les relations du nombre gordien avec d'autres invariants de la théorie des entrelacs, nous donnons maintenant d'autres définitions du gordien.

Vers la définition 2.

Soit B^3 la boule standard de dimension 3. Soient V le diamètre de B^3 passant par les pôles, E l'équateur de B^3 que l'on découpe en deux arcs de grand cercle. Poussons un peu ces arcs dans B^3, de façon à ce qu'on obtienne deux arcs L et P plongés proprement et d'extrémités communes A et B. Soit H le diamètre passant par A et B (V = Vertical, H = Horizontal, L = Lointain, P = Proche ; voir figure 2).

Soit K un entrelacs dans S^3. Soit $\psi : B^3 \to S^3$ un plongement différentiable ou P.L., tel que : $\psi^{-1}(K) = V \cup L$. Par définition, l'échange élémentaire associé à ψ consiste à remplacer l'arc $\psi(L)$ de K par l'arc $\psi(P)$.

Si $\psi_1, ..., \psi_v$ sont v plongements, disjoints deux à deux, de B^3, on peut effectuer v échanges élémentaires simultanés.

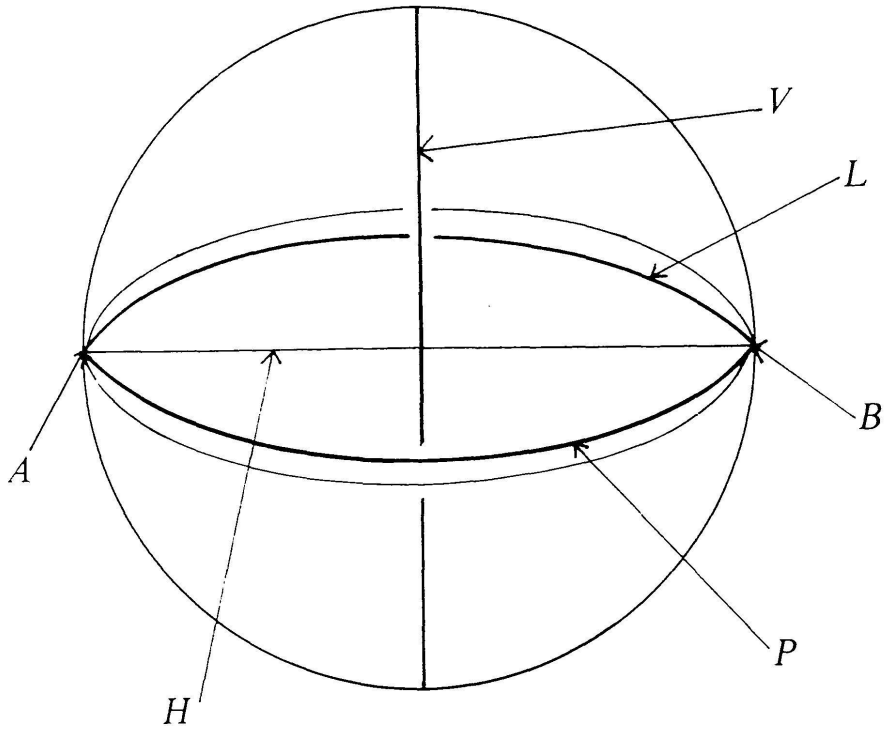


FIGURE 2

La démonstration du lemme montre, qu'étant donné un entrelacs K dans S^3, il existe un certain nombre d'échanges élémentaires simultanés qui permettent de transformer K en l'entrelacs trivial.

Définition 2. Le nombre gordien de K est le nombre minimum d'échanges élémentaires simultanés nécessaires pour rendre K trivial.

Manifestement, il n'est pas indispensable cette fois de faire varier K dans sa classe d'équivalence.

Vers la définition 3.

Soient φ_0 et φ_1 deux plongements différentiables de $S_r = \coprod_{i=1}^{r} S_i^1$ dans S^3.

Une homotopie régulière générique reliant φ_0 à φ_1 est une application différentiable $\Phi : S_r \times [0, 1] \to S^3$ telle que, si $\Phi_t(x) = \Phi(x, t)$, alors :

1. $\Phi_0 = \varphi_0$ et $\Phi_1 = \varphi_1$
2. Pour presque tout $t \in [0, 1]$ (c'est-à-dire pour tout $t \in [0, 1]$, sauf un nombre fini de valeurs), Φ_t est un plongement.
3. Si Φ_t n'est pas un plongement, alors Φ_t est une immersion ayant pour seules singularités des points doubles à tangentes distinctes.

Soit maintenant K un entrelacs dans S^3. Choisissons une paramétrisation de K, c'est-à-dire un plongement $\varphi : S_r \to S^3$ dont l'image est K. (Ce que nous allons faire est indépendant du choix de la paramétrisation.)

Un dénouement de K est une homotopie régulière générique Φ reliant φ au plongement trivial (paramétrant l'entrelacs trivial). Il existe toujours un dénouement de K : encore une fois c'est une conséquence du lemme. Le nombre gordien du dénouement Φ est la somme du nombre des points doubles des Φ_t, pour tout $t \in [0, 1]$.

Définition 3. Le nombre gordien de K est le minimum des nombres gordiens de tous les dénouements de K.

Remarque. Nous avons supposé l'application Φ différentiable. Ceci implique que, si le nombre gordien de Φ est nul, les entrelacs paramétrés par Φ_0 et Φ_1 sont équivalents. Ceci est une conséquence du théorème d'extension des isotopies de R. Thom.

Attention en général en théorie des entrelacs le terme d'isotopie désigne une notion plus faible (voir par exemple D. Rolfsen [Ro_3], J. Hillman [Hi]).

Vers la définition 4.

Posons $D_r = \coprod_{i=1}^{r} D_i^2$; on a $\partial D_r = S_r$.

Soit $\varphi : S_r \hookrightarrow S^3$ un plongement différentiable. Considérons les immersions $G : D_r \looparrowright S^3 \times \mathbf{R}_+$, où $\mathbf{R}_+ = [0, +\infty[$, telles que :

1. $G^{-1}(S^3 \times \{0\}) = S_r$
2. $G \mid S_r = \varphi$
3. $p \circ G : D_r \to \mathbf{R}_+$ est une fonction de Morse avec r maxima pour seuls points critiques. L'application $p : S^3 \times \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ désigne la projection canonique.
4. les seules singularités de l'immersion G sont des points doubles génériques, en nombre fini.

Une paramétrisation φ de l'entrelacs K étant donnée, il est facile de vérifier (cf. [BW]) qu'une telle immersion G existe toujours. Le nombre gordien de G est alors le nombre de points doubles de G.

Définition 4. Le nombre gordien de l'entrelacs K est le minimum des nombres gordiens de toutes les immersions G possibles.

THÉORÈME. *Les quatre définitions données sont équivalentes.*

Pour une démonstration, voir [BW].

§ 4. Le problème de Milnor

Dans son livre sur les singularités [Mi_1, p. 92] J. Milnor pose la question suivante (voir aussi [Kir, pb. 1.14]):

Soit $f : (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une fonction polynomiale ayant une singularité isolée en 0. Soit K le nœud algébrique associé au polynôme f et soit δ le nombre associé à la singularité qui intervient dans la formule de Riemann-Roch (cf. § 1). Est-ce que $\delta = u(K)$?

La « conjecture de Milnor » affirme que oui. Nous verrons dans ce paragraphe que δ et $u(K)$ ont tous deux une interprétation en termes de points doubles, ce qui rend la conjecture très plausible.

Il est connu (mais pas évident) que $u(K) \leqslant \delta$. La première démonstration de cette inégalité est due à H. Pinkham, et L. Rudolph en a donné une autre. Nous présentons ici une preuve très élémentaire de cette inégalité. Elle est le résultat de discussions passionnantes que nous avons eues avec D. Bennequin, et nous le remercions de son aide.

Références: H. Pinkham [Pi]; L. Rudolph [Ru].

Finalement nous achèverons ce paragraphe en observant que si la conjecture de Milnor est vraie pour les singularités à une branche, alors elle est toujours vraie. Nous remercions F. Michel pour d'utiles conversations sur cette question.

Interprétation du nombre δ en termes de points doubles proches.

Dans [A], N. A'Campo démontre que la fonction f possède une déformation analytique réelle f_τ, telle que, pour $\tau \neq 0$, $f_\tau^{-1}(0)$ possède δ points doubles ordinaires (« nodes »). En fait A'Campo démontre bien plus: les nodes sont tous réels.

Interprétons ce résultat. Soit D_ε^4 une boule de Milnor pour $f = f_0$. Pour τ suffisamment petit, ∂D_ε sera aussi transverse à $f_\tau^{-1}(0)$ et l'entrelacs K_τ déterminé par l'intersection $\partial D_\varepsilon \cap f_\tau^{-1}(0)$ dans ∂D_ε sera équivalent (différentiablement et de façon orientée) à K. Pour le vérifier, on observe que « être transverse » est une condition ouverte, puis on applique le théorème d'extension des isotopies.

Du point de vue différentiable, le morceau de courbe algébrique $f_\tau^{-1}(0) \cap D_\varepsilon$ est l'image d'une immersion de $D_r = \coprod_{i=1}^{r} D_i^2$ avec δ points doubles génériques. De plus ce nombre de points doubles est, en un certain sens, rigide. De façon plus précise: si pour une certaine déformation f_s de $f = f_0$, dès que s est

suffisamment proche de 0, $f_s^{-1}(0)$ est l'image d'une immersion de D_r avec des points doubles génériques pour seules singularités, alors ce nombre de points doubles est nécessairement égal à δ.

Pour démontrer ces dernières affirmations, on répète l'argument de Milnor que nous avons rappelé à la fin du § 1 : on homogénise f et on regarde la courbe projective plane correspondante. On applique le théorème de Riemann-Roch à cette courbe et à celle correspondant à une petite déformation. Un calcul facile des genres donne la solution.

D'autre part, souvenons-nous que la définition 4 donne aussi une interprétation du nombre gordien en termes de nombre minimum de points doubles d'une immersion différentiable de $D_r = \coprod_{i=1}^{r} D_i^2$ dans D^4.

La différence entre les deux concepts vient de ce que les deux types d'immersions considérées ont des propriétés supplémentaires qui sont différentes dans les deux cas. En effet :

a) Dans le cas du nombre gordien, l'immersion est (seulement) différentiable. Mais elle se comporte très bien quand on la compose avec la projection sur $\mathbf{R}_+$: elle est de Morse avec le minimum de points critiques compatibles avec la topologie de D_r.

b) En ce qui concerne $f_\tau^{-1}(0)$, τ petit, $\tau \neq 0$, l'immersion est $\mathbf{C}$-analytique. (C'est beaucoup plus fort que différentiable!) Mais elle se comporte moins bien quand on projette sur $\mathbf{R}_+$: l'application est génériquement de Morse et n'a pas de minimum.

Références : L. Rudolph [Ru] ; J. Milnor [Mi_2].

Le mot « ribbon » est souvent employé dans ce dernier contexte. Voir l'article de L. Rudolph [Ru] cité ci-dessus.

En résumé : Interprétés comme nous venons de la faire, δ et $u(K)$ ont indéniablement une certaine ressemblance. Il est tentant d'essayer d'utiliser cette ressemblance dans les deux interprétations pour montrer qu'ils sont égaux.

Nous allons maintenant démontrer que, pour un entrelacs algébrique K : $u(K) \leqslant \delta$. (C'est le théorème de H. Pinkham.) En fait cette inégalité sera une conséquence d'une proposition plus générale sur les tresses fermées.

Soit donc B_n le groupe des tresses à n brins, de générateurs canoniques $\{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_{n-1}\}$. Soit β un mot en les σ_i. Nous désignons par :

b la longueur du mot.

$\hat{\beta}$ la tresse fermée associée à β.

r le nombre de composantes de l'entrelacs $\hat{\beta}$.

Référence générale sur les tresses: J. Birman [Bi].

PROPOSITION. $u(\hat{\beta}) \leqslant \frac{1}{2}(b-n+r)$.

Commentaire. Cette majoration n'est pas extraordinaire en principe. Par exemple, si $n = r$, elle affirme seulement que $u(\hat{\beta}) \leqslant \frac{1}{2} b$, et b n'est rien d'autre que le nombre de croisements de $\hat{\beta}$. Un argument analogue à celui donné dans la preuve du lemme du § 3 donne immédiatement la démonstration dans ce cas. La majoration est un peu meilleure quand r est petit par rapport à n.

Nous indiquons maintenant comment le théorème de Pinkham se déduit de la proposition. Nous allons le faire en plusieurs étapes.

a) Il est bien connu qu'un entrelacs algébrique K est équivalent à une tresse fermée $\hat{\beta}$, où β est une tresse positive. Par là on entend que β peut se représenter en un mot en les σ_i, où tous les exposants sont égaux à $+1$. Remarquons qu'il s'agit d'une équivalence entre entrelacs orientés: K est orienté comme nous l'avons indiqué au § 1 et $\hat{\beta}$ est muni de l'orientation naturelle des tresses fermées. Ceci est une conséquence du théorème de préparation de Weierstrass.

b) Une tresse positive est, en particulier, une tresse homogène au sens de J. Stallings [St_2]. Dans l'article en question Stallings démontre, généralisant un concept dû à K. Murasugi, que $\hat{\beta}$ est un entrelacs fibré, et que la fibre est la surface de Seifert U donnée par la construction de Seifert, effectuée sur la présentation $\hat{\beta}$.

c) Un calcul élémentaire donne alors pour la caractéristique d'Euler de

$$U : \chi(U) = b_0(U) - b_1(U) = n - b\,,$$

où b_i désigne le i-ème nombre de Betti. Or, $b_0(U) = 1$ puisqu'on a un entrelacs fibré, et $b_1(U) = \mu$. D'où $\mu = b - n + 1$. D'autre part, la formule de Milnor, $2\delta = \mu + r - 1$, donne $2\delta = b - n + 1 + r - 1 = b - n + r$.

Remarque. Si on veut démontrer la conjecture de Milnor par des voies « purement topologiques » par exemple en utilisant essentiellement la théorie des nœuds et entrelacs, il est difficile de tenir compte assez exactement de l'hypothèse que l'on part d'un entrelacs algébrique, car les entrelacs algébriques

constituent une classe assez particulière d'entrelacs toriques itérés. C'est pourquoi, si on travaille selon ces lignes, il est naturel de généraliser la conjecture de Milnor en:

Conjecture. (cf. [Ru]). Soit β une tresse positive. Alors $u(\hat{\beta}) = \frac{1}{2}(b-n+r)$.

La preuve de la proposition sera faite en plusieurs pas.

1er pas. En supprimant $(n-r)$ croisements, on transforme $\hat{\beta}$ en un entrelacs à n composantes. Plus précisément, en supprimant $(n-r)$ lettres du mot β, convenablement choisies, on obtient un mot γ tel que $\hat{\gamma}$ soit un entrelacs à n composantes. Bien sûr la longueur de γ est $b-(n-r)$.

2e pas. Numérotons les brins de β (et de γ) de droite à gauche: $1, 2, ..., n$. Désignons par γ_i la composante de $\hat{\gamma}$ qui correspond au i-ème brin.

A chaque point d'intersection de la projection de γ_i avec la projection de $\gamma_j (i<j)$ attribuons le signe $+$ si γ_i passe dessus γ_j et le signe $-$ sinon. Soit $N(\gamma_i, \gamma_j)$ la somme des signes ainsi obtenus. Finalement,

$$a_i = \sum_{j \geqslant i+1} N(\gamma_i, \gamma_j)$$

Nous allons transformer la tresse γ en une tresse λ en changeant les signes de certains croisements, de façon à ce que $\hat{\lambda}$ soit l'entrelacs trivial à n composantes. Nous allons le faire de façon économique.

Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les n composantes de $\hat{\lambda}$. Si $a_1 \geqslant 0$, décidons que λ_1 sera au-dessus de toutes les autres composantes $\lambda_2, ..., \lambda_n$. Par contre, si $a_1 < 0$, décidons que λ_1 sera au-dessous de toutes les autres composantes. De même, si $a_2 \geqslant 0$, décidons que λ_2 sera au-dessus de $\lambda_3, \lambda_4, ..., \lambda_n$; sinon décidons qu'elle sera au-dessous. Par récurrence, si $a_i \geqslant 0$, décidons que λ_i sera au-dessus de $\lambda_{i+1}, ..., \lambda_n$; sinon décidons qu'elle sera au-dessous.

En vertu de la définition des $N(\gamma_i, \gamma_j)$, toute cette opération pourra se faire en effectuant au plus $\frac{1}{2}(b-(n-r))$ changements de signes aux croisements.

3e pas. Rétablissons les $(n-r)$ croisements que nous avions supprimés dans le 1er pas. Nous obtenons une tresse ε. Nous affirmons que $\hat{\varepsilon}$ est un entrelacs trivial à r composantes. Bien évidemment ceci achèvera la preuve de la proposition.

Tout d'abord, il est clair que le nombre de composantes de $\hat{\varepsilon}$ est r, car $\hat{\beta}$ et $\hat{\varepsilon}$ ont même projection (sans les signes).

Pour voir que $\hat{\varepsilon}$ est trivial, revenons à $\hat{\lambda}$. Par construction, chaque composante λ_i est dans un plan horizontal. Si $i \neq j$, le plan contenant λ_i est distinct du plan contenant λ_j. Toujours par construction, le plan horizontal contenant λ_1 est soit au-dessus soit au-dessous de tous les autres.

Considérons alors la permutation w de $\{1, 2, ..., n\}$ associée à la tresse ε. Si w laisse fixe 1, la composante λ_1 se retrouve inchangée dans $\hat{\varepsilon}$. Il est clair qu'elle est non nouée et non enlacée avec les autres composantes de $\hat{\varepsilon}$, car on peut l'isotoper en un tout petit cercle dans son plan horizontal sans rencontrer d'obstacle, car le plan horizontal contenant λ_1 est extrémal.

Si la permutation w ne laisse pas fixe 1, il y a un croisement et un seul qui relie λ_1 à une autre composante de $\hat{\lambda}$, disons $\lambda_k (k \neq 1)$. On peut considérer ce croisement comme le bord d'une mini bande verticale (effectuant un demi-tour) et reliant le plan horizontal contenant λ_k à celui contenant λ_1.

Comme le plan horizontal contenant λ_1 est extrémal, on peut isotoper la boucle correspondant à λ_1 dans ce plan jusqu'à ce qu'on arrive aux extrémités de la bande verticale, ceci sans rencontrer d'obstacles. Ensuite on isotope les côtés de la boucle verticale jusqu'à ce qu'on se trouve dans le plan horizontal contenant λ_k.

Un facile raisonnement par récurrence (sur le nombre de brins) achève alors la démonstration.

Remarque. Notons $\pi(\hat{\beta})$ la projection associée à la présentation en tresse fermée $\hat{\beta}$. La démonstration de la proposition 1 donne aussi une minoration du nombre gordien de la projection $\pi(\hat{\beta})$. Elle montre en effet que:

$$u(\pi(\hat{\beta})) \geqslant \frac{1}{2}(|c| - n + r),$$

où c désigne la longueur algébrique de la tresse β (c'est la somme exponentielle du mot β).

Pour vérifier cela, remarquons tout d'abord que d'après la démonstration précédente: $u(\pi(\hat{\beta})) = \inf\{u(\hat{\gamma})$; où γ décrit tous les mots possibles, obtenus à partir du mot β en supprimant $(n-r)$ lettres pour que $\hat{\gamma}$ ait n composantes$\}$.

Par construction, la longueur algébrique c' d'une telle tresse γ vérifie: $|c'| \geqslant |c| - (n-r)$.

D'autre part, d'après l'affirmation 2 de la seconde proposition de ce même paragraphe, $u(\hat{\gamma}) \geqslant |\sum_{i<j} \mathscr{L}(\gamma_i, \gamma_j)|$, où $\mathscr{L}(\gamma_i, \gamma_j)$ désigne le coefficient d'enlacement de la composante γ_i de $\hat{\gamma}$ avec la composante γ_j de $\hat{\gamma}$.

La minoration annoncée découle alors de l'égalité : $|\sum_{i<j} \mathscr{L}(\gamma_i, \gamma_j)| = \frac{1}{2}|c'|$. Cette égalité se vérifie aisément pour toutes les tresses pures, en utilisant le disque bordé par chaque composante γ_i et donné par la présentation en tresse fermée de $\hat{\gamma}$.

Nous conseillons au lecteur d'illustrer la preuve ci-dessus par quelques exemples de son choix ; voir aussi [BW].

Nous montrons maintenant qu'il suffit de démontrer la conjecture de Milnor dans le cas des entrelacs algébriques à une branche.

PROPOSITION. *Soit L un entrelacs algébriques à r branches :*

$$L_1, L_2, ..., L_r .$$

Si la conjecture de Milnor est vraie pour chacune des branches, alors elle est vraie pour L.

Preuve de la proposition. Remarquons que, grâce au théorème de Pinkham, la conjecture de Milnor est équivalente à $\delta \leqslant u(L)$. (Les notations sont celles du début du paragraphe.)

La proposition découle immédiatement des deux affirmations ci-dessous.

Affirmation 1. Soit δ_i, l'invariant « δ » pour la i-ème branche. Soit $\mathscr{L}(L_i, L_j)$, le coefficient d'enlacement de L_i avec $L_j (i \neq j)$. On a :

$$\delta = \sum_{i=1}^{r} \delta_i + \sum_{i<j} \mathscr{L}(L_i, L_j)$$

Rappelons que pour un entrelacs algébrique, $\mathscr{L}(L_i, L_j) > 0$.

Affirmation 2. Soit K un entrelacs quelconque à r composantes : $K_1, ..., K_r$. On a :

$$u(K) \geqslant \sum_{i=1}^{r} u(K_i) + \sum_{i<j} |\mathscr{L}(K_i, K_j)| .$$

Donnons quelques indications sur la démonstration de ces deux affirmations.

Pour l'affirmation 1, la formule est donnée par Milnor dans son livre [Mi_1, p. 93]. Elle résulte d'un calcul classique en géométrie algébrique, à partir de la définition de δ que nous avons donnée en utilisant la clôture intégrale de l'anneau local.

Pour un topologue, c'est une conséquence facile de la formule de Milnor $2\delta = \mu + r - 1$, de l'interprétation de μ comme le rang de l'homologie en

dimension 1 d'une surface de Seifert de genre minimal, et de la représentation en tresses fermées positives des entrelacs algébriques.

Pour l'affirmation 2, c'est une conséquence facile de la définition 4 du nombre gordien et du fait que: l'enlacement de deux cercles dans S^3 est égal à l'intersection de deux chaînes qu'ils bordent dans D^4.

Application. Nous verrons au § 6 que la conjecture de Milnor est vraie pour les nœuds du tore de type $(2, n)$, $(3, 4)$ et $(3, 5)$. La proposition précédente entraîne, par exemple, que la conjecture de Milnor est vraie pour l'entrelacs d'A'Campo, dont le nombre gordien est donc $u = 6$.

Plus facilement encore, la conjecture de Milnor est vraie pour l'entrelacs de Hopf généralisé $\Gamma(d, d)$, associé au point d-uple ordinaire (cf. § 1). Dans ce cas $u(\Gamma(d, d)) = \dfrac{d(d-1)}{2}$.

§ 5. Relation entre le nombre gordien et d'autres invariants de la théorie des entrelacs

A. *Nombre gordien et genre de Murasugi*

Au § 1, nous avons défini le genre g d'une surface compacte orientable G comme: $g(G) = \sum_i g(\overline{G_i})$, où les $\overline{G_i}$ désignent la surface close obtenue en collant un disque de dimension 2 sur chaque composante de ∂G_i. Le nombre $g(\overline{G_i})$ désigne alors le genre usuel. Ceci est la façon traditionnelle de procéder dans ce type de situations et amène aux genres de Seifert et de Murasugi pour les entrelacs dont nous avons parlé au § 2.

Références classiques: K. Murasugi [Mu]; A. Tristam [Tri].

Cependant dans le cas des entrelacs à plusieurs composantes, cette définition n'est pas toujours la plus pratique. Par exemple un entrelacs de genre zéro n'est pas nécessairement trivial.

De même, le genre de Murasugi traditionnel des entrelacs se compare mal avec le nombre gordien. C'est pourquoi nous introduisons un nouvel invariant que nous proposons d'appeler le grand genre (car il majore le genre habituel).

Soit donc, à nouveau, G une surface compacte, orientable. G n'est pas nécessairement connexe et son bord a, disons, r composantes connexes.

Désignons par P_r la surface plane connexe, dont le bord a r composantes connexes. Il y a une façon essentiellement unique d'identifier le bord de G et le bord de P_r pour obtenir une surface close, orientable $\hat{G}$. La surface $\hat{G}$ est

connexe si et seulement si G n'a pas de composante connexe close. Alors, par définition, le grand genre de G, noté $t(G)$ est: $t(G) =$ genre usuel de $\hat{G}$.

Remarques. 1) Le grand genre d'un anneau est 1, alors que son genre traditionnel est zéro. Plus généralement $t(P_r) = r - 1$.

2) Une surface est de grand genre nul si et seulement si c'est une union disjointe de sphères et de disques.

Le lien entre genre et grand genre est donné par le lemme facile suivant, où $b_0(G)$ désigne le nombre de composantes connexes de G.

LEMME. $t(G) = g(G) + (r - b_0(G))$.

Le grand genre est un invariant utile dans certaines circonstances. Par exemple, revenons à la situation du § 1:

Soit $f: (\mathbf{C}^2, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ une application polynomiale ayant 0 pour singularité isolée. Pour t non nul, suffisamment petit, considérons $X = f^{-1}(t) \cap D$, où D est une boule de Milnor. Abstraitement X est la « fibre de Milnor » de l'entrelacs algébrique associé à f.

LEMME. *Le nombre* δ *attaché à la singularité est égal au grand genre de la fibre de Milnor.*

La démonstration résulte d'un calcul immédiat sur l'homologie des surfaces en question.

Soit maintenant K un entrelacs orienté dans S^3. On peut définir son grand genre de Seifert et son grand genre de Murasugi, en prenant le minimum des grands genres des surfaces de Seifert pour K (respectivement des surfaces de Murasugi pour K).

L'économie de vocabulaire qui résulte de ces définitions nous paraît assez importante. Par exemple un entrelacs est trivial si et seulement si son grand genre de Seifert est nul. Un entrelacs est fortement cobordant à zéro (au sens de A. Tristam ou K. Murasugi) si et seulement si son grand genre de Murasugi est nul.

Notations: $S(K)$ pour le grand genre de Seifert de K.
$M(K)$ pour le grand genre de Murasugi de K.

Avec cette notation, la conjecture anonyme du § 2 (voir aussi [Kir, pb. 1.40]) s'énonce: pour tout entrelacs algébrique K, on a $M(K) = \delta(K)$.

Bien sûr, dans le cas des nœuds (entrelacs connexes) il n'y a pas de différence entre genre et grand genre.

La proposition suivante donne un lien entre le grand genre de Murasugi et le nombre gordien.

PROPOSITION. *Soit K un entrelacs non orienté dans S^3 de nombre gordien u. Alors, quelle que soit l'orientation de K, on a:* $M(K) \leqslant u(K)$.

Preuve de la proposition. Nous allons utiliser la définition 4 du nombre gordien. Par hypothèse, il existe une immersion différentiable

$$G : D_r = \coprod_{i=1}^{r} D_i^2 \looparrowright D^4 ,$$

propre, telle que $G^{-1}(S^3) = S_r$ et $G \mid S_r$ est une paramétrisation orientée de K. De plus les seules singularités de G sont des points doubles génériques en quantité u. (Nous n'avons pas besoin du comportement de Morse de $p \circ G$.)

Plaçons-nous en un point double de G. Par définition de « générique », il existe une petite boule B^4 au voisinage du point double telle que $B^4 \cap \operatorname{Im} G$ soit difféomorphe à l'intersection de la boule unité dans $\mathbf{R}^4$ avec deux plans réels en position générale.

Par conséquent, $\partial B^4 \cap \operatorname{Im} G$ est un entrelacs de Hopf à deux composantes, orienté. Cet entrelacs borde dans ∂B^4, de façon orientée, un anneau.

Enlevons de $\operatorname{Im} G$, l'intersection $\mathring{B}^4 \cap \operatorname{Im} G$ et mettons à sa place l'anneau dont nous venons de parler. Effectuons cette opération à chaque point double. Nous obtenons ainsi une surface V qui est une surface de Murasugi pour K.

Abstraitement, V est obtenue à partir de D_r en enlevant $2u$ petits disques dans $\mathring{D}_r$ et en collant u anneaux. Quelle que soit la façon dont on procède le grand genre de V est toujours le même et est égal à u. (Tandis que le genre usuel dépend de la façon dont on procède.)

Pour vérifier ce dernier point, on peut remarquer que $\hat{V}$ est, par construction, obtenue à partir de $D_r \underset{\partial}{\cup} P_r = S^2$ en recollant u anneaux orientés.

Ceci achève la démonstration de la proposition.

Nous insérons maintenant une petite parenthèse. En prenant un peu de soin en recollant l'anneau, on peut s'arranger pour que la surface V que l'on obtient soit « ribbon », c'est-à-dire telle que $p \mid V \to \mathbf{R}_+$ ne possède pas de minimum local.

Si on désigne alors par $M'(K)$ le grand genre de Murasugi pour les surfaces qui sont « ribbon », on a donc en fait : $M'(K) \leqslant u(K)$.

D'autre part, l'interprétation de δ en termes de points doubles proches que nous avons donnée au § 4 montre que pour un entrelacs algébrique, on a aussi : $M'(K) \leqslant \delta(K)$. Voir [Ru].

Malheureusement il est très difficile d'utiliser cette information supplémentaire de façon pertinente. Peut-être un lecteur avisé le pourra-t-il? Nous achevons là la parenthèse.

Pour comparer le nombre gordien avec le genre de Murasugi traditionnel, on peut utiliser le lemme du début du paragraphe. Cependant, il y a en principe une ambiguïté, car on ignore a priori le nombre de composantes connexes de la surface V que l'on a construite. Il y a toutefois un cas où l'on peut s'en tirer facilement:

Soit K un entrelacs à r composantes. Associons à K un graphe $\Gamma(K)$ de la façon suivante:

i) Les sommets de $\Gamma(K)$ sont en bijection avec les composantes de K.

ii) Une arête relie le sommet K_i au sommet K_j, $i \neq j$, si et seulement si $\mathscr{L}(K_i, K_j) \neq 0$.

Il est clair que, si $\Gamma(K)$ est connexe, la surface V de Murasugi associée à une immersion de dénouement G, comme dans la preuve de la proposition précédente, est toujours connexe. (On utilise le principe du calcul des enlacements dans S^3 par des intersections dans D^4). Par conséquent:

PROPOSITION. *Soit K un entrelacs à r composantes, tel que $\Gamma(K)$ soit connexe. Alors, quelle que soit l'orientation de K: $m(K) + (r-1) \leqslant u(K)$.*

Rappelons que pour un entrelacs algébrique, le coefficient d'enlacement entre deux composantes n'est jamais nul. De sorte que la proposition précédente s'applique aux entrelacs algébriques.

B. *La conjecture de Thom implique la conjecture de Milnor.*

THÉORÈME (classique). *Si la conjecture de Thom est vraie, alors la conjecture de Milnor est vraie.*

Preuve. Nous venons de montrer que l'on a toujours: $M(K) \leqslant u(K)$.

Le théorème de Pinkham dit que, pour un entrelacs algébrique: $u(K) \leqslant \delta(K)$.

Finalement, la conjecture de Thom implique que, pour les entrelacs algébriques: $M(K) = \delta(K)$. D'où le résultat.

C. *Nombre gordien et homotopies d'entrelacs.*

Pour ce qui nous concerne, nous prendrons pour définition d'une homotopie entre deux entrelacs ce qui suit.

Soient K et L deux entrelacs non orientés dans S^3. On dira que K et L sont homotopes si on peut passer de K à L en effectuant sur K un nombre fini d'échanges élémentaires de telle façon que, lors de chaque échange, les deux brins appartiennent à la même composante.

Il n'est pas difficile de voir que cette définition est équivalente à la définition traditionnelle. Mais il est clair qu'elle se prête mieux à l'étude du nombre gordien.

Références (pour la définition traditionnelle): J. Hillman [Hi]; J. Milnor [Mi_3].

Un entrelacs est, par définition, homotopiquement trivial, s'il est homotope à un entrelacs trivial.

L'exemple standard d'un entrelacs non trivial et pourtant homotopiquement trivial est l'entrelacs de J. H. C. Whitehead (Fig. 3).

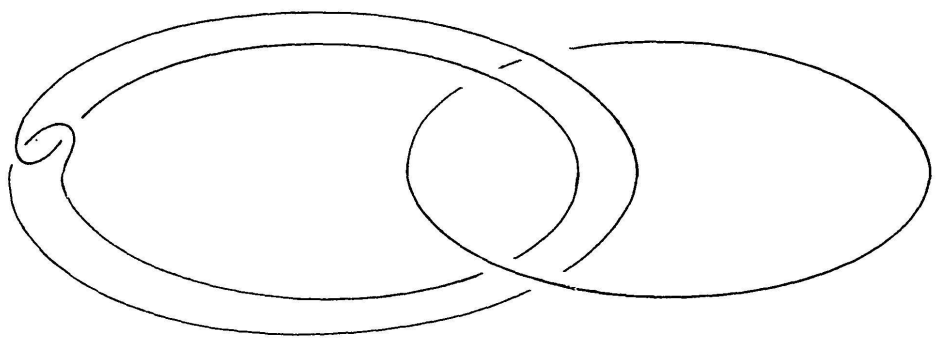


FIGURE 3

Ceci suggère la définition suivante (F. Michel):

Soit L un entrelacs non orienté dans S^3. Le nombre gordien homotopique de L est le nombre minimum d'échanges élémentaires simultanés qu'il faut effectuer pour transformer L en un entrelacs homotopiquement trivial. On exige que lors de chaque échange, les deux brins appartiennent à deux composantes distinctes.

Nous noterons le nombre gordien homotopique de K (homotopy unknotting number of K) par $hu(K)$.

La proposition suivante n'est pas difficile.

PROPOSITION. *Soit K un entrelacs non orienté à r branches: $K_1, K_2, \ldots, K_r$. Alors:*

a) $hu(K) \geqslant \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant r} |\mathscr{L}(K_i, K_j)|$.

b) $u(K) \geqslant hu(K) + \sum_{i=1}^{r} u(K_i)$.

Notes. 1) L'entrelacs de Whitehead montre que l'inégalité b peut très bien être stricte.

2) Cette proposition est une version un peu plus forte de l'affirmation 2 que nous avons utilisée au § 4.

Preuve de la proposition. Pour a), c'est encore une fois une conséquence du principe que « l'enlacement sur le bord est égal à l'intersection à l'intérieur ».

Pour b), nous utilisons le fait que l'on peut effectuer les échanges élémentaires à l'instant où l'on veut. Voir [BW].

Soit donc $G: D_r \hookrightarrow S^3 \times \mathbf{R}_+$ une immersion selon la définition 4. Nous pouvons supposer:

i) $\frac{1}{2} \in \mathbf{R}_+$ n'est l'image par p d'aucun point double.

ii) si Q est un point double de l'immersion G tel que $p(Q) < \frac{1}{2}$, alors Q est un point d'intersection entre deux disques différents, tandis que

iii) si Q est un point double tel que $p(Q) > \frac{1}{2}$, alors Q est un point double faisant intervenir deux points d'un même disque.

Alors $p^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \subset S^3 \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$ est un entrelacs homotopiquement trivial, et la conclusion suit immédiatement.

L'étude du gordien homotopique semble une question intéressante. Voici quelques premiers jalons.

1. Soit K un entrelacs à deux composantes K_1 et K_2. Alors $hu(K) = |\mathscr{L}(K_1, K_2)|$.

Cette égalité est une petite généralisation d'un théorème de J. Milnor, qui affirme qu'un entrelacs à deux composantes et de coefficient d'enlacement nul est homotopiquement trivial. Il est facile de s'y ramener, ou de la démontrer directement.

Référence: J. Milnor [Mi_3].

2. Pour les entrelacs avec $r \geqslant 3$ composantes, on peut très bien avoir une inégalité stricte: $hu(K) > \sum_{i<j} |\mathscr{L}(K_i, K_j)|$.

Par exemple, l'entrelacs des Borromées est tel que $\mathscr{L}(K_i, K_j) = 0$ si $i \neq j$, et pourtant il n'est pas homotopiquement trivial. (Pour les Borromées $u = hu = 2$).

3. Milnor montre que l'entrelacs des Borromées n'est pas homotopiquement trivial en utilisant son invariant μ. (Ce n'est pas celui des singularités, mais celui qui est défini dans [Mi_3] et dans [Mi_4]).

Question. Y a-t-il une connection entre les invariants que Milnor introduit dans les articles en question et le gordien homotopique des entrelacs?

D. *Genre de Murasugi et signature.*

Le genre de Murasugi est un invariant très difficile à calculer. En fait il y a peu de nœuds ou entrelacs pour lesquels on connaisse sa valeur exacte. Dans ce contexte, la signature donne une minoration utile, car calculable en principe. Hélas, cette minoration n'est en général pas décisive.

Nous rappelons maintenant de quoi il s'agit, en signalant au lecteur que nous reviendrons plus en détails sur cette question au § 6 dans le cadre des signatures de J. Levine et A. Tristram.

Références: K. Murasugi [Mu]; L. Kauffman et L. Taylor [KT].

Soit K un entrelacs orienté dans S^3 et soit V une surface de Murasugi de K.

Considérons le revêtement à 2 feuilles Y_V de D^4, ramifié sur V. Y_V est une variété de dimension 4, compacte, connexe, orientée (par la projection sur D^4). Elle a un bord qui est le revêtement à 2 feuilles de S^3, ramifié sur K.

On considère alors la forme d'intersection sur $H_2(Y_V; \mathbf{Q})$. Cette forme est $\mathbf{Q}$-bilinéaire, symétrique. Elle peut très bien être dégénérée, car ∂Y est non vide. Elle a néanmoins une signature.

On montre (cf. Kauffman-Taylor [KT]) que cette signature ne dépend que de K et pas du choix de la surface de Murasugi V. Notons la $\sigma(K)$.

Il y a plusieurs façons de calculer explicitement $\sigma(K)$. Pour la théorie générale, voir Gordon-Litherland [GoL]. Rappelons en particulier que si A est la forme de Seifert associée à une surface de Seifert U de K, alors $(A+A^{\#}) \otimes \mathbf{Q}$ est la forme d'intersection de Y_U. ($A^{\#}$ désigne la transposée de A).

On a alors le théorème suivant, dû à K. Murasugi [Mu]. Pour une démonstration plus moderne voir Kauffman-Taylor [KT]. Voir aussi le théorème 2 du § 6.

THÉORÈME. *Soit K un entrelacs orienté à r composantes dans S^3. Alors:* $|\sigma(K)| \leqslant 2m(K) + r - \mathrm{nul}(K)$.

Ici, nul(K) désigne la « nullité de Murasugi » de K par opposition à la nullité d'Alexander, qui est un concept différent; voir le livre de J. Hillman [Hi].

Rappelons que par définition $\mathrm{nul}(K) = 1 + q_1$, où q_1 est le premier nombre de Betti rationnel du revêtement à 2 feuilles de S^3 ramifié sur K.

On a les renseignements suivants sur la nullité:

PROPOSITION. *Soit K un entrelacs orienté à r composantes dans S^3. Alors:*

a) $\mathrm{nul}(K) \leqslant r$

b) *si A est la forme de Seifert associée à une surface de Seifert U de K:* $\mathrm{nul}(K) = \dim_{\mathbf{Q}}(\text{radical de } (A+A^{\#})\otimes\mathbf{Q}) + b_0(U)$, *où $b_0(U)$ désigne le nombre de composantes connexes de U.*

COROLLAIRE. *Pour un nœud* $(r=1)$, $|\sigma(K)| \leqslant 2m(K)$.

Application de la formule de Murasugi.

Il y a une formule qui donne la signature des entrelacs du tore (cf. § 6). Cette formule et la formule de Murasugi, appliquées aux entrelacs algébriques K associés aux singularités $X^a - Y^b = 0$, montrent que l'on a $M(K) = \delta(K)$ lorsque:

i) $(a, b) = (2, n)$, $n \geqslant 1$ (résultat connu de Murasugi [Mu]);

ii) $(a, b) = (3,3)$ ou $(3,4)$ ou $(3,5)$ ou $(3,6)$ ou $(4,4)$.

Ce sont les seuls entrelacs algébriques pour lesquels la conjecture anonyme est connue. Par conséquent la conjecture de Milnor est vraie pour ces entrelacs algébriques.

Rappelons finalement que la signature croit très lentement par satellisation, de sorte que les formules précédentes donnent de mauvaises minorations pour les branches à plusieurs paires de Puiseux.

Référence: Y. Shinohara [Shi].

E. *Nombre gordien et revêtements cycliques infinis.*

Pour un entrelacs orienté K, on a: $M(K) \leqslant u(K)$ et $M(K) \leqslant S(K)$. Il est donc assez naturel de se demander s'il existe une relation entre le nombre gordien K et le grand genre de Seifert de K.

Au vu des exemples que nous présentons dans la partie F de ce paragraphe, nous pensons qu'il n'y en a pas, même pour les entrelacs fibrés.

Tout d'abord on a les théorèmes suivants:

THÉORÈME (H. Kondo). *Soit* $P(t)$ *un polynôme à coefficients entiers, de degré* $2h$, *tel que* $P(1) = \pm 1$ *et* $P(t) = t^{2h}P(t^{-1})$. *Alors il existe un nœud* K, *de nombre gordien* 1, *de genre de Seifert* h, *ayant* $P(t)$ *pour polynôme d'Alexander.*

Référence: H. Kondo [Ko].

THÉORÈME (T. C. V. Quach). *Soit* $P(t)$ *un polynôme comme dans le théorème précédent et tel que, en plus,* $P(0) = \pm 1$. *Alors il existe un nœud fibré satisfaisant les mêmes conditions que celles du théorème précédent.*

Référence: T. C. V. Quach [Qa].

Note. Ces théorèmes montrent que la situation est plus complexe que le problème 1.4 de la liste de R. Kirby [Ki] ne laisse supposer.

Nous donnerons dans la partie F des exemples de nœuds rationnels fibrés de gordien 1 et de genre arbitraire (voir aussi Y. Nakanishi [Na]).

Hélas il est plus difficile de trouver des nœuds de petit genre et de grand nombre gordien, car on tombe à nouveau sur le problème de la minoration du nombre gordien.

Dans cette direction, la meilleure minoration connue est toujours celle de H. Wendt que nous allons décrire maintenant d'une façon un peu différente de la sienne. Cette minoration se généralise facilement aux cas des entrelacs. Pour cela nous avons besoin de rappeler quelques notions classiques.

Si K est un entrelacs orienté à r composantes dans S^3, il existe un homomorphisme surjectif unique $l: \pi_1(S^3 - K) \twoheadrightarrow \mathbf{Z}$, qui envoie chaque méridien orienté de K sur 1. (Un méridien m_i de K est orienté par $\mathscr{L}(m_i, K_j) = \delta_{ij}$ où les K_j sont les composantes de K).

Désignons par $E(K)$ l'espace total du revêtement cyclique infini du complément de K dans S^3, associé au noyau de l. On peut identifier le groupe de Galois du revêtement avec le groupe cyclique infini T, noté multiplicativement $T = \{t^i\}_{i \in \mathbf{Z}}$.

Le groupe d'homologie $H_1(E(K); \mathbf{Z})$ est de façon naturelle un module sur le groupe de Galois, donc un $\mathbf{Z}T$-module.

THÉORÈME. *Soit* K *un entrelacs orienté à* r *composantes dans* S^3, *et de nombre gordien* u. *Alors le* $\mathbf{Z}T$*-module* $H_1(E(K); \mathbf{Z})$ *peut être engendré par* $u + r - 1$ *éléments.*

Note. Dans le cas d'un nœud ($r = 1$), $H_1(E(K); \mathbf{Z})$ est le module d'Alexander de K, et ce théorème est alors implicite dans l'article de H. Wendt et également

chez D. Rolfsen. D'ailleurs, dans ce cas là, il a été remarqué par beaucoup de monde, par exemple par Y. Nakanishi.

Références: H. Wendt [We]; D. Rolfsen [Ro_1], [Ro_2]; Y. Nakanishi [Na].

Désignons par $e(K)$ le nombre minimum de générateurs du $\mathbf{Z}T$-module $H_1(E(K); \mathbf{Z})$. Nous avons donc:

COROLLAIRE 1. $e(K) \leqslant u(K) + r - 1$.

Nous appellerons cette inégalité, l'inégalité de Wendt. (Rappelons que $e(K)$ dépend de l'orientation de K, tandis que $u(K)$ en est indépendant).

COROLLAIRE 2. *Le module d'Alexander d'un nœud* $(r=1)$ *de nombre gordien* 1 *est monogène.*

Commentaires. 1) On voit que la question de l'étude algébrique du module d'Alexander des nœuds (et plus généralement des modules $H_1(E(K); \mathbf{Z})$ dans le cas des entrelacs) a un certain intérêt en ce qui concerne le nombre gordien. Toute méthode permettant d'évaluer $e(K)$ sera la bienvenue. La théorie des idéaux élémentaires permet de trouver certaines minorations.

2) Une méthode classique, due originalement à H. Seifert, permet de trouver une présentation du module d'Alexander à partir d'une matrice de Seifert du nœud. Un petit examen de cette méthode (cf. par exemple [Sei]) montre que $e(K) \leqslant 2s(K)$, lorsque K est un nœud. Par conséquent, la minoration de Wendt ne peut dépasser deux fois le genre de Seifert dans le cas d'un nœud.

Preuve du théorème. Nous allons en donner une basée sur la notion de description chirurgicale d'un entrelacs, due à D. Rolfsen [Ro_1]. De fait, dans le cas des nœuds $(r=1)$, la démonstration qui suit est implicite dans l'article de Rolfsen [Ro_2].

Reprenons la définition 1 du nombre gordien. (La définition 2 ferait aussi l'affaire).

K est un entrelacs orienté à r composantes. Considérons une bonne projection de K et un processus de dénouement de K, basé sur cette projection. Envisageons un point double de la projection, qui va changer de signe au cours du processus. Sans tenir compte des signes, la projection est localement:

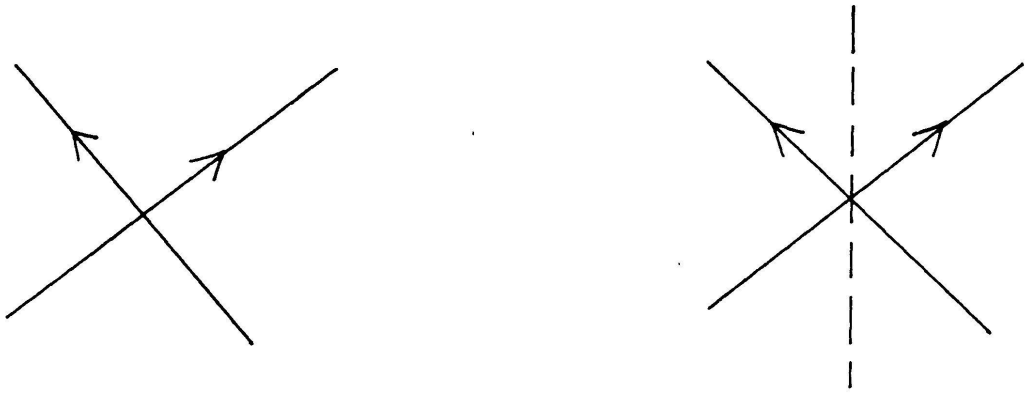


FIGURE 4

Les orientations des brins proviennent de l'orientation de l'entrelacs.

Considérons le segment de droite dessiné en pointillé sur la figure de droite. « Au-dessus » de ce segment se trouve un plan dans $\mathbf{R}^3$. Il est facile de dessiner un disque Δ dans ce plan, ayant la propriété que $\Delta \cap K = \mathring{\Delta} \cap K$ consiste en exactement deux points, chacun d'eux étant donné par l'intersection d'un des deux brins avec Δ.

Illustration :

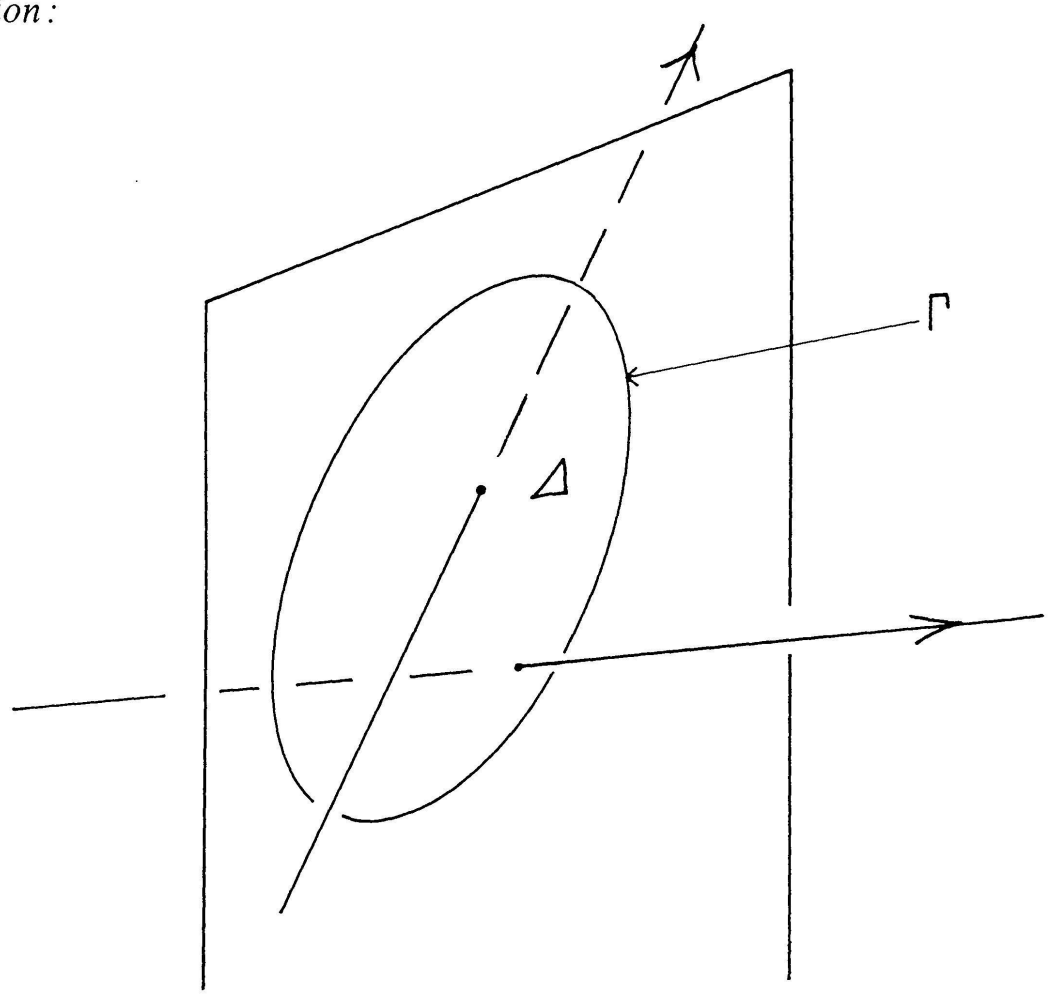


FIGURE 5

Soit $\Gamma = \partial\Delta$. Γ est un cercle non noué dans S^3, ne rencontrant pas K, et le nombre d'enlacement de Γ avec K est nul (grâce à la position choisie du plan par rapport aux brins orientés).

Soit N un voisinage tubulaire de Γ dans S^3, suffisamment petit pour ne pas rencontrer K. N est un tore plein et comme Γ est non noué, $S^3 - \mathring{N}$ est aussi un tore plein W. Un disque méridien de W est précisément le disque Δ, un peu rétréci.

Effectuons un twist de Dehn τ dans W, concentré au voisinage de Δ. Pour cela, choisissons un petit voisinage $\Delta \times [-1, +1]$ de Δ dans W. (Nous choisissons une identification). Alors, par définition $\tau(x, t) = (e^{i(t+1)\pi} \cdot x, t)$, avec $(x, t) \in \Delta \times [-1, 1]$, Δ étant identifié au disque unité dans $\mathbf{C}$. Le twist τ se prolonge par l'identité en un automorphisme de W, mais, attention, il ne se prolonge pas en un automorphisme de S^3.

Comme K est dans $\mathring{W}$, on peut considérer $\tau(K)$. Alors, à isotopie près, $\tau(K)$ aura même projection que K. Tous les points doubles auront même signe, sauf celui que nous considérons, qui, lui, a changé de signe.

Précaution : Cette dernière affirmation dépend de la façon dont on identifie $\Delta \times [-1, 1]$ à un voisinage de Δ dans W. Ce qui compte est la normale au plan qui contient Δ, qu'il faut orienter convenablement. Sur l'illustration précédente, l'orientation de la normale part de l'œil du spectateur pour traverser Δ.

Supposons maintenant que le processus de dénouement associé à la bonne projection, que nous avons choisie pour K, fasse intervenir u changements de signes aux points doubles.

Nous choisissons u petits tores pleins $N_1, ..., N_u$ selon la méthode que nous venons d'indiquer. La composition des twists $\tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_u$, où τ_i est le twist sur W_i, est bien définie sur $Y = \bigcap_{i=1}^{u} W_i = S^3 - \bigcup_{i=1}^{u} N_i$; notons la τ. L'ordre de la composition importe peu car les supports des τ_i sont disjoints. Posons $N = \bigcup_{i=1}^{u} N_i$.

Par définition d'un processus de dénouement, $\tau : Y \to Y$ est un difféomorphisme qui envoie K sur l'entrelacs trivial T_r dans S^3.

D'autre part, $Y - K = S^3 - (N \cup K)$ est difféomorphe par τ à $\tau(Y) - \tau(K) = S^3 - (N \cup T_r)$.

On passe de $S^3 - (N \cup K)$ à $S^3 - K$ en ajoutant des 2-cellules et des 3-cellules. (On remplit les tores pleins $N_1, ..., N_u$).

Si $p: E(K) \to S^3 - K$ est la projection du revêtement infini cyclique, associé à l'homomorphisme d'enlacement total l, posons: $Z = p^{-1}(S^3-(N\cup K)) = p^{-1}(Y-K)$.

On passe de Z à $E(K)$ en ajoutant des 2-cellules et des 3-cellules car la restriction $p\,|: p^{-1}(N) \to N$ est un revêtement trivial (produit), puisque le nombre d'enlacement de chaque tore plein N_i avec K est nul. Donc le nombre de générateurs du $\mathbf{Z}T$-module $H_1(Z;\mathbf{Z})$ majore celui de $H_1(E(K);\mathbf{Z})$. Nous allons estimer le nombre de générateurs du $\mathbf{Z}T$-module $H_1(Z;\mathbf{Z})$.

Pour cela observons que le revêtement cyclique infini, $E(T_r)$ associé à l'homomorphisme d'enlacement total, de l'entrelacs trivial T_r, est difféomorphe à la somme connexe d'un nombre infini de copies de l'intérieur d'un corps avec $(r-1)$ anses. Chaque copie est indexée par un élément de $\mathbf{Z}$, et le générateur du groupe de Galois T est la transformation qui envoie la copie d'indice i sur celle d'indice $i+1$. En particulier, en tant que $\mathbf{Z}T$-module, $H_1(E(T_r);\mathbf{Z})$ est de rang $r-1$.

Soit $q: E(T_r) \to S^3 - \tau(K)$ la projection de revêtement et soit

$$Z' = q^{-1}(S^3-(N\cup\tau(K))) = q^{-1}(\tau(Y-K)).$$

Pour un pull-back de τ, $Z = p^{-1}(Y-K)$ et $Z' = q^{-1}(\tau(Y-K))$ sont Galois-équivalents. Les $\mathbf{Z}T$-modules $H_1(Z;\mathbf{Z})$ et $H_1(Z';\mathbf{Z})$ sont donc isomorphes.

Il est facile de voir que $H_1(Z';\mathbf{Z})$ est engendré par $u+r-1$ éléments comme module sur $\mathbf{Z}T$, car $Z' = E(T_r) - q^{-1}(N)$, où $H_1(E(T_r);\mathbf{Z})$ est de rang $r-1$ en tant que $\mathbf{Z}T$-module, et la restriction $q\,|: q^{-1}(N) \to N$ est un revêtement trivial de « groupe de Galois » T, puisque le nombre d'enlacement de chaque tore plein N_i avec $\tau(K) = T_r$ est nul.

Remarque. Nous n'avons utilisé que la partie la plus facile de la méthode de D. Rolfsen. Dans le cas des nœuds ($r=1$), en poussant l'analyse plus loin il montre comment on peut, en principe, trouver une présentation du module d'Alexander.

En fait, les énoncés de H. Wendt portent sur l'homologie des revêtements ramifiés cycliques finis, plutôt que sur celle des revêtements cycliques infinis. Nous allons nous y ramener par une méthode dont le principe était déjà connu de H. Seifert dans le cas des nœuds.

Notations. Soit K un entrelacs orienté à r composantes dans S^3. Nous désignerons par $E_n(K)$ l'espace total du revêtement cyclique à n feuilles de S^3, ramifié sur K. Rappelons que, si $r \geqslant 2$, le type topologique de $E_n(K)$ dépend de l'orientation de K (dès que $n \geqslant 3$).

Le groupe d'homologie $H_1(E_n(K); \mathbf{Z})$ est un module sur $\mathbf{Z}T$. M. Sakuma [Sak] a démontré le théorème suivant, bien connu dans le cas des nœuds ($r=1$, cf. [Gor]).

THÉORÈME. *$H_1(E_n(K); \mathbf{Z})$ est isomorphe comme $\mathbf{Z}T$-module à*

$$\operatorname{Coker}\{1 + t + \dots + t^{n-1} : H_1(E(K); \mathbf{Z}) \to H_1(E(K); \mathbf{Z})\}.$$

Références: M. Sakuma [Sak].

Nous obtenons alors l'énoncé traditionnel du théorème de H. Wendt, où $e_n(K)$ désigne le nombre minimum de générateurs du groupe abélien

$$H_1(E(K_n); \mathbf{Z}).$$

THÉORÈME (H. Wendt). *Soit K un entrelacs orienté à r composantes dans S^3. Alors: $e_n(K) \leqslant (n-1)(u(K)+r-1)$.*

COROLLAIRE. $e_2(K) \leqslant u(K) + r - 1$.

Commentaires.

1) Souvenons-nous que, pour un nœud $K(r=1)$, $e_2(K) \leqslant 2s(K)$.

La méthode de Wendt permet de trouver (ce qu'il a fait, cf. [We]) des nœuds de nombre gordien $u(K) \geqslant 2s(K)$. Nous en donnons des exemples dans la partie G de ce paragraphe. Bien que les candidats abondent, il semble bien que pour l'instant, il n'existe aucun nœud pour lequel on sache montrer que $u(K) > 2s(K)$.

2) Les majorations plus fines de $e_n(K)$, obtenues par S. Kinoshita dans le cas des nœuds, montrent que le théorème de Wendt fournit souvent une minoration très faible du nombre gordien $u(K)$.

Références: S. Kinoshita [Kin$_1$], [Kin$_2$].

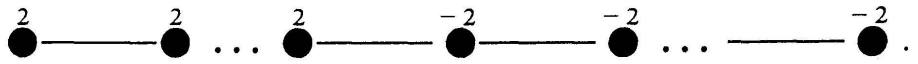
F. *Exemples: nombre gordien et grand genre de Seifert d'un entrelacs.*

Considérons les entrelacs algébriques ou, plus généralement les tresses positives fermées orientées, munies de l'orientation naturelle. Ces entrelacs sont tous fibrés. Nous avons vu au § 4 que leur grand genre de Seifert est supérieur ou égal au nombre gordien. Cette remarque a conduit A. Durfee à poser la question suivante: « a-t-on $u(K) \leqslant s(K)$ pour tout nœud fibré K? »

Le but des exemples que nous présentons ici est de donner une réponse négative à la première question de A. Durfee. En fait, nous conjecturons qu'en général il n'y a aucun rapport entre ces deux invariants, et qu'étant donnés

deux entiers positifs u et s arbitraires ($s \geqslant 2$), il existe un nœud fibré de nombre gordien u et de genre s.

Par exemple, il est facile de construire des nœuds fibrés de gordien 1 et de genre de Seifert s arbitrairement grand (cf. [Na]): il suffit de considérer le nœud à 2 ponts associé au plombage de $2s$ bandes paires, suivant:



(Voir aussi les nœuds construits par T. C. V. Quach [Qa]).

Par contre nous ne connaissons aucun exemple de nœuds (fibrés ou non) de genre 1 et de gordien arbitrairement grand. Les candidats ne manquent pas (cf. § 7, B-5); manquent les invariants pour minorer le nombre gordien.

Voici des exemples qui répondent négativement à la question de A. Durfee:

Soit l'entrelacs de bretzel $K_n = K(-1, 3, ..., 3)$, qui est le bord de la surface constituée de deux disques reliés par $(n+1)$ bandes tordues, et orienté comme sur la figure 6.

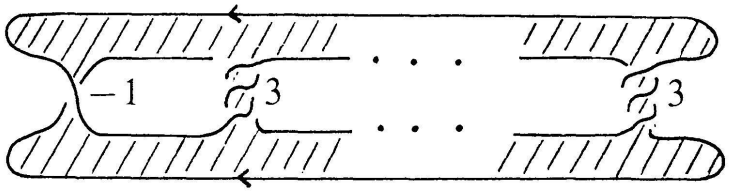


FIGURE 6

Cet entrelacs fibre pour l'orientation donnée, et la surface fibre F_n est la surface plate hachurée, car cet entrelacs orienté s'obtient à partir de l'entrelacs fibré torique $(2, n+1)$ par n twists de Stallings [St_2] (cf. T. C. V. Quach [Qa]; voir aussi T. Kanenobu [Ka] pour une preuve algébrique).

On a $S(K_n) = \left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, et une application immédiate de l'inégalité de Wendt montre que $u(K_n) \geqslant n - 2$. Pour des détails, voir [BW].

Commentaires. 1) Dans le cas où n est pair, $n = 2p$, K_{2p} est un nœud fibré. Alors $S(K_{2p}) = s(K_{2p}) = p$ et $u(K_{2p}) \geqslant 2p - 1$. Ceci donne une réponse négative à la première question de Durfee dès que $p \geqslant 2$.

2) Dans le cas où n est impair, $n = 2p + 1$, K_{2p+1} est un entrelacs orienté à 2 composantes, et pour l'orientation donnée $S(K_{2p+1}) = p + 1$. En utilisant le § 5-c, on montre que $u(K_{2p+1}) = 3p + 1$.

G. *Les exemples de H. Wendt.*

L'idée de comparer le nombre gordien d'un nœud avec son genre de Seifert est déjà dans l'article original de H. Wendt [We]. En fait Wendt avait exhibé des nœuds K (non fibrés!) de genre de Seifert $s(K)$ et de gordien $u(K) \geqslant 2s(K)$ (par exemple le nœud 9_{35} dans la tabulation de Reidemester [Re]).

Nous donnons ici une généralisation des exemples de Wendt. Notons K_{2q+1}, $q \geqslant 1$, le nœud de bretzel $K(3, 3, ..., 3)$, qui est le bord de la surface constituée de deux disques reliés par $2q + 1$ bandes tordues, et qui est représenté sur la figure 7.

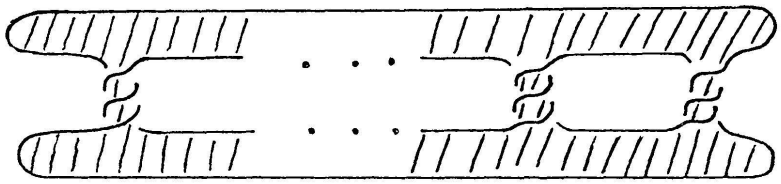


FIGURE 7

D'après T. Kanenobu [Ka] (voir aussi [Qa]), ce nœud n'est jamais fibré. On a: $u(K_{2q+1}) \geqslant 2q = 2s(K_{2q+1})$.

§ 6. SIGNATURES

Historiquement, à notre connaissance, deux voies ont été suivies par les topologues pour essayer de démontrer la conjecture de Thom.

La première consiste à utiliser ce que nous avons expliqué aux § 1 et 2: minorer le mieux possible le genre de Murasugi des entrelacs de Hopf généralisés. Nous avons vu au § 5 que la signature de l'entrelacs donne une première minoration. Une difficulté de cette approche est que la signature dépend en principe aussi bien de d que de r. L'introduction des signatures « tordues » et le théorème 3 ci-après, dus à A. Tristram, permettent d'obtenir des minorations qui ne dépendent que de d.

Référence: A. Tristram [Tri].

Ces signatures ont aussi été introduites par J. Levine dans le cas des nœuds, à la fin de son article sur le cobordisme, dans un but différent de celui de Tristram.

Référence: J. Levine [Lev].

La deuxième voie consiste à utiliser le théorème de la G-signature d'Atiyah-Singer, en l'appliquant à certains revêtements cycliques de $\mathbf{CP}^2$, ramifiés sur une surface différentiable de degré d. Ce fut le chemin suivi par W. C. Hsiang-R. H. Szczarba et par V. Rohlin.

Références: W. C. Hsiang-R. H. Szczarba [HS]; V. Rohlin [Rh].

Or, dans les deux cas (Tristram et Rohlin) les calculs que l'on effectue sont essentiellement les mêmes et donnent les mêmes bornes. La raison de ce phénomène est donnée par O. Viro qui a montré que, dans les deux cas, on calcule en fait le même invariant.

Référence: O. Viro [Vi].

Dans ce paragraphe, nous allons suivre l'approche par la théorie des entrelacs. Les bornes obtenues sont environ la moitié du nombre escompté dans la conjecture. Une excellente référence générale sur les signatures « tordues » des nœuds (i.e. $r=1$) est donnée par l'article de C. Mc. Gordon [Gor]. Le cas des entrelacs présente quelques difficultés supplémentaires, liées à l'apparition de la dégénérescence. C'est pourquoi nous avons choisi une présentation plus proche de K. Murasugi et A. Tristram.

Nous commençons par quelques manipulations matricielles.

Référence: T. Matumoto [Ma].

Soit W un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$. Soit $l: W \times W \to \mathbf{C}$ une forme sesquilinéaire. Aucune hypothèse de « symétrie » ou de non dégénérescence n'est faite sur l. Ceci sera utile pour les applications topologiques que nous avons en vue.

Soit $\xi \in \mathbf{C}$, $\xi \neq 1$. Posons: $l_\xi = \frac{1}{2}\{(1-\bar{\xi})l + (1-\xi)l^*\}$, où $*$ désigne la conjuguée-transposée.

LEMME 1.

a) l_ξ *est une forme hermitienne, c'est-à-dire* $l_\xi^* = l_\xi$.

b) *Soit* $\omega = -\dfrac{1-\xi}{1-\bar{\xi}}$. *Alors* $l_\omega = \dfrac{1-\mathrm{Re}\xi}{|1-\xi|^2}\, l_\xi$.

La preuve découle de calculs faciles.

Nous serons intéressés dans la suite à la dégénérescence et à la signature des formes l_ξ. (Par a) ceci a bien un sens). La partie b) du lemme 1 montre que nous ne perdons rien en ne considérant que les formes l_ω avec $|\omega| = 1$, ce que nous ferons désormais.

Rappelons qu'il y a plusieurs façons de calculer la signature et la dégénérescence d'une forme hermitienne:

1. On diagonalise la forme en appliquant la méthode de la « completion du carré ». Si r_0 désigne le nombre de zéros qui se trouvent dans la diagonale, r_+ le nombre de réels positifs qui s'y trouvent et r_- celui des réels négatifs, alors : r_0 est la dégénérescence et $r_+ - r_-$ est la signature.
(Théorème de Sylvester des cours d'Algèbre linéaire)

Notations: $\deg(l_\omega)$ et $\operatorname{sign}(l_\omega)$.

2. On calcule le polynôme caractéristique $\det(\mathrm{id} + tl_\omega)$. Alors r_0 = nombre de racines nulles, r_+ = nombre de racines positives, et r_- = nombre de racines négatives.

3. Les topologues citent souvent la méthode du § 3 du livre de B. Jones, qui n'est pas nécessairement la plus rapide dans les applications.

Référence: B. Jones [Jo].

LEMME 2. *Si* $|\omega| = 1, \omega \neq 1$, *on a:*

$$l_\omega = \frac{1}{2}(1-\bar{\omega})\{l-\omega l^*\}$$

La preuve découle d'un calcul immédiat utilisant que si $|\omega| = 1$, on a:

$$\frac{1-\omega}{1-\bar{\omega}} = -\omega .$$

Ce lemme montre que les formes « à la J. Levine » fournissent la même famille d'invariants que les formes « à la A. Tristram ». Nous en aurons besoin parfois dans la suite, pour certains calculs.

Appliquons ce qui précède à la théorie des entrelacs. Soit K un entrelacs orienté dans S^3. Soit U une surface de Seifert pour K, et soit A la forme de Seifert associée à U. Comme U n'est pas unique, A n'est pas un invariant de K. Mais on peut montrer que:

PROPOSITION 1. *Si A et A' sont deux formes de Seifert pour K, on peut passer de l'une à l'autre par un nombre fini d'opérations du type suivant:*

i) Isométrie.

ii) Nous utilisons une notation matricielle, qui est plus succincte.

iia) Passer de A à $\bar{A}$ avec:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} & 0 & 0 \\ A & \vdots & \vdots \\ & 0 & 0 \\ \hline * \ldots * & 0 & 0 \\ \hline 0 \ldots 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \quad \text{ou } \bar{A} = \left[\begin{array}{c|c|c} & * & 0 \\ A & \vdots & \vdots \\ & * & 0 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

iib) Passer de $\bar{A}$ à A.

iiia) Passer de A à $\tilde{A}$, avec:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \\ \hline 0 \ldots 0 & 0 \end{array}\right]$$

iiib) Passer de $\tilde{A}$ à A.

De plus, si on ne considère que des surfaces de Seifert connexes, les opérations i) et ii) suffisent.

Référence: C. Mc. Gordon-R. Litherland [GoL].
(Le passage-clé est dans la partie II du théorème 11).

Note. Dans cet article, nous ne nous intéressons qu'aux entrelacs fibrés. Nous pourrions alors nous dispenser de la proposition 1 et du lemme 3 en utilisant que la fibre plongée est essentiellement unique. On définirait tout à partir de la forme de Seifert associée à la fibre.

LEMME 3. *Soit K un entrelacs orienté dans S^3. Soient A et A' deux formes de Seifert pour K, associées à deux surfaces de Seifert* connexes *de K. Soit $\omega \in \mathbf{C}$, avec $|\omega| = 1$ et $\omega \neq 1$. Alors:*

$$\deg(A_\omega) = \deg(A'_\omega)\,, \textit{ et } \operatorname{sign}(A_\omega) = \operatorname{sign}(A'_\omega)\,.$$

Bien sûr, un entrelacs possède toujours des surfaces de Seifert connexes. Par le lemme 3, nous pouvons définir la dégénérescence et la signature de K en ω, que nous noterons: $\deg_\omega(K)$ et $\operatorname{sign}_\omega(K)$.

Preuve du lemme 3. Il suffit d'examiner le passage de A_ω à $\bar{A}_\omega$. Or:

$$\bar{A}_\omega = \left[\begin{array}{c|c|c} & (1-\omega)a_1 & 0 \\ & \vdots & \vdots \\ A_\omega & & \\ & (1-\omega)a_n & 0 \\ \hline (1-\bar{\omega})\bar{a}_1 \;\ldots\; (1-\bar{\omega})\bar{a}_n & 0 & (1-\omega) \\ \hline 0 \;\ldots\; 0 & (1-\bar{\omega}) & 0 \end{array}\right]$$

Un calcul immédiat montre que le polynôme caractéristique de $\bar{A}_\omega$ est le produit de celui de A_ω par $[x^2-2(1-\mathrm{Re}\omega)]$. Ce dernier a une racine positive et une racine négative, ce qui achève la preuve.

Remarque. Si $\omega = -1$, la signature que nous venons de définir n'est rien d'autre que la signature de Murasugi dont nous avons parlé au § 5. Nous avons vu que dans ce cas, la nullité et la dégénérescence sont reliées par l'égalité:

$$\mathrm{nul}(K) = \deg_{-1}(K) + 1$$

(Ne pas oublier que nos surfaces de Seifert sont maintenant connexes).

Essentiellement pour ne pas rompre avec la tradition, introduisons un nouvel invariant, la nullité de K en ω, définie par: $\mathrm{nul}_\omega(K) = \deg_\omega(K) + 1$.

Les deux théorèmes suivants sont essentiellement dus à A. Tristram [Tri].

THÉORÈME 1. *Soit ω une racine p^i-ème de 1, avec p premier. Soient K et K' deux entrelacs orientés concordants. Alors:*

$$\mathrm{nul}_\omega(K) = \mathrm{nul}_\omega(K') \text{ et } \mathrm{sign}_\omega(K) = \mathrm{sign}_\omega(K').$$

Attention! Le théorème est faux si ω n'est pas une racine p^i-ème de 1 avec p premier. C'est la raison pour laquelle A. Tristram n'envisage que des ω qui sont des racines p-èmes de 1, la généralisation à p^i étant facile.

La définition d'une concordance (on dit aussi cobordisme) entre deux entrelacs orientés est la suivante:

Définition. Soient K^0 et K^1 deux entrelacs orientés, à r composantes. Désignons par $(-K^1)$ l'entrelacs obtenu à partir de K^1 en changeant l'orientation de chacune de ses composantes. Nous dirons que K^0 et K^1 sont concordants, s'il existe un plongement différentiable $\Phi: S_r \times [0, 1] \to S^3 \times [0, 1]$, tel que: (on rappelle que $S_r = \coprod_{i=1}^{r} S_i^1$)

a) $\Phi^{-1}(S^3 \times \{0\}) = S_r \times \{0\}$
$\Phi^{-1}(S^3 \times \{1\}) = S_r \times \{1\}$

b) $\Phi \mid S_r \times \{0\}$ (resp. $\Phi \mid S_r \times \{1\}$) soit une paramétrisation de K^0 (resp. de K^1).

c) le bord orienté de $\mathrm{Im}(\Phi)$ soit $K^0 \times \{0\} \coprod (-K^1) \times \{1\}$.

THÉORÈME 2. *Soit V une surface de Murasugi pour l'entrelacs orienté K. Soit ω une racine p^i-ème de 1, avec p premier. Alors:*

$$|\operatorname{sign}_\omega(K)| + |\operatorname{nul}_\omega(K) - b_o(V)| \leqslant r - b_o(V) + 2g(V)$$

(Conformément à nos notations, introduites précédemment, r désigne le nombre de composantes de K, et $b_o(V)$ désigne le nombre de composantes connexes de V).

Remarque. Comme $\operatorname{nul}_\omega(K) - b_o(V) \leqslant |\operatorname{nul}_\omega(K) - b_o(V)|$, le théorème 2 a pour conséquence l'inégalité $|\operatorname{sign}_\omega(K)| \leqslant r - \operatorname{nul}_\omega(K) + 2g(V)$, quelle que soit V.
Par conséquent, on obtient la formule plus commode:

$$|\operatorname{sign}_\omega(K)| \leqslant r - \operatorname{nul}_\omega(K) + 2m(K),$$

où $m(K)$ désigne le genre de Murasugi de K.

Notre but est d'utiliser cette dernière formule pour minorer le genre de Murasugi des entrelacs de Hopf généralisés, que nous avons notés $\Gamma(r, d)$. Pour obtenir des minorations qui ne dépendent que de d, nous allons utiliser un autre résultat de Tristram que nous présentons maintenant.

Soit K un entrelacs orienté dans S^3, à r composantes: $K_1, \ldots, K_r$. Donnons-nous également un plongement $\varphi: S^1 \times [0, 1] \to S^3$ d'un anneau tel que: $\varphi(S^1 \times \{0\}) = K_r$ et $\varphi^{-1}(K) = S^1 \times \{0\}$.

Considérons l'anneau $R = \varphi(S^1 \times [1/2, 1])$. Orientons R et considérons le bord orienté ∂R. Définissons K_* comme étant l'entrelacs orienté $K \cup \partial R$. Bien sûr, K_* a $(r+2)$ composantes. Soit $K_{r+2} = \varphi(S^1 \times \{1\})$.

Soit $n = |\sum_{i=1}^{r} \mathscr{L}(K_{r+2}, K_i)| = |\mathscr{L}(K_{r+2}, K)|$.

THÉORÈME 3. *Soit* ω *une racine* s*-ème de* 1, *avec* s *divisant* n. *Alors:*

$$\mathrm{sign}_\omega(K) = \mathrm{sign}_\omega(K_*) \text{ et } \mathrm{nul}_\omega(K) = \mathrm{nul}_\omega(K_*) - 2\,.$$

Note. Dans le théorème 3, s n'est pas nécessairement puissance d'un premier.

On peut donner une démonstration de ces trois théorèmes en suivant les indications données par A. Tristram lorsque $\omega^p = 1$. Voir [BW].

Nous allons maintenant appliquer les théorèmes précédents aux entrelacs de Hopf généralisés. Pour cela, nous avons besoin de savoir ce qui se passe pour les entrelacs du tore. Le théorème qui suit est cité très souvent dans la littérature, surtout en ce qui concerne la signature classique. Pour ce qui nous intéresse, les références utiles sont: R. Litherland [Lit]; T. Matumoto [Ma].

THÉORÈME 4. *Soit* $K(p, q)$ *l'entrelacs (orienté) du tore de type* (p, q). *Soit* x *un nombre réel,* $0 < x < 1$, *et soit* $\omega = \exp(2\sqrt{-1}\,\pi x)$. *Notons:*

r_0: *le nombre de couples d'entiers* (i, j), *avec* $0 < i < p$, $0 < j < q$, *et tels que* $\dfrac{i}{p} + \dfrac{j}{q} \equiv x \pmod 1$;

r_-: *le nombre de ces couples* (i, j), *tels que* $x - 1 < \dfrac{i}{p} + \dfrac{j}{p} < x \bmod 2$;

r_+: *le nombre de ces couples* (i, j) *tels que* $x < \dfrac{i}{p} + \dfrac{j}{q} < x + 1 \bmod 2$.

Alors, $\mathrm{nul}_\omega(K(p, q)) = r_0 + 1$ *et* $\mathrm{sign}_\omega(K(p, q)) = r_+ - r_-$.

Nous allons esquisser une preuve de ce théorème en suivant T. Matumoto [Ma]. La clé de la preuve est dans la proposition suivante.

PROPOSITION. *Soit* K *un entrelacs du tore, de fibre* U *et de forme de Seifert* A. *Alors, il existe une base de* $H_1(U; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C}$ *telle que l'extension sesquilinéaire* l *de* A *à* $H_1(U; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{C}$ *soit diagonale dans cette base.*

Voici quelques points de repères.

Soit a un entier positif. On montre tout d'abord que l'extension sesquilinéaire de la forme de Seifert associée à la singularité $z^a = 0$ se diagonalise. La matrice diagonale est:

$$N_a = a \begin{bmatrix} 1-\zeta^{-1} & & & \\ & 1-\zeta^{-2} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1-\zeta^{-(a-1)} \end{bmatrix}$$

où $\zeta = \exp(2\sqrt{-1}\pi/a)$.

On applique ensuite le théorème de K. Sakamoto [Saa], pour en déduire qu'une diagonalisation de A sera: $N_p \otimes N_q$. Pour plus de détails voir l'article de Matumoto [Ma].

Dans la base correspondante, A_ω aura pour élément diagonaux:

$$2\,\mathrm{Re}\{(1-\omega)(1-\zeta_1^{-i})(1-\zeta_2^{-j})\},$$

où

$$\zeta_1 = \exp(2\sqrt{-1}\pi/p),\ \zeta_2 = \exp(2\sqrt{-1}\pi/q),\ 1 \leqslant i \leqslant p-1,\ 1 \leqslant j \leqslant q-1.$$

Pour calculer le signe de la partie réelle, on utilise l'égalité:

$$(1-x) = -2\sqrt{-1}(\exp(\sqrt{-1}\pi t))\sin\pi t,$$

où $x = \exp(2\sqrt{-1}\pi t)$, $0 < t < 1$.

La suite des calculs est alors sans surprise.

Nous pouvons maintenant démontrer:

THÉORÈME 5. *Soit* $\Gamma(r, d)$ *un entrelacs de Hopf généralisé. Alors, on a* $m(\Gamma(r, d)) \geqslant \dfrac{d^2-4}{4}$ *si* d *est pair. Si* d *est impair, soit* $d = p^i d'$ *avec* p *premier, alors:* $m(\Gamma(r, d)) \geqslant \dfrac{d^2-4}{4} - \left(\dfrac{d'}{2}\right)^2$.

Remarque. Très grossièrement, la borne ainsi obtenue, est la moitié de celle donnée par la conjecture anonyme du § 2.

Le théorème 5 découle d'un calcul un peu long mais sans aucune difficulté qui donne les signatures tordues des entrelacs $\Gamma(d, d)$, grâce au théorème 4.

On choisit $\omega = -1$ si d est pair, et $\omega = \exp[2\sqrt{-1}\pi(p^i-1)/2p^i]$ si d est impair et $d = p^i d'$ avec p premier.

On applique ensuite les théorèmes 2 et 3 pour étendre la minoration aux entrelacs $\Gamma(r, d)$.

En appliquant l'argument classique de transversalité développé au § 2 nous obtenons ainsi une preuve du théorème de Rohlin et Hsiang-Szczarba, dans le cas de $\mathbf{CP}^2$.

THÉORÈME ([Rh], [HS]). *Soit F une surface différentiable, close, connexe, orientable dans $\mathbf{CP}^2$. Supposons que F est de degré d. Alors le genre de F est au moins égal à:* $\dfrac{d^2-4}{2}$ *si d est pair et à* $\dfrac{d^2-4}{4} - \left(\dfrac{d'}{2}\right)^2$ *si d est impair, $d = p^i d'$, avec p premier.*

Note. Comme nous n'avons pas pris de précaution quant à l'orientation globale des entrelacs, les calculs précédents montrent plutôt que la valeur absolue des signatures est égale au nombre indiqué.

§ 7. QUELQUES PROBLÈMES LIÉS AU NOMBRE GORDIEN

Le but de ce paragraphe est de mentionner et de commenter quelques problèmes liés au nombre gordien d'un entrelacs mais qui ne sont pas directement rattachés aux problèmes de R. Thom et de J. Milnor.

A-1) Dès qu'on définit un invariant des entrelacs, il est important de connaître son comportement par rapport à la somme connexe. Il est alors naturel de posér la question suivante (cf. Knot theory, Proceedings Plans-sur-Bex [Hau]): « le nombre gordien est-il additif pour la somme connexe: c'est-à-dire a-t-on $u(K_1 \# K_2) = u(K_1) + u(K_2)$? »

On vérifie aisément que: $u(K_1 \# K_2) \leqslant u(K_1) + u(K_2)$.

L'exemple de la figure 8, où l'on considère la somme connexe du nœud de trèfle droit avec le nœud de trèfle gauche, montre que le nombre gordien de ce nœud, qui est 2 par l'inégalité de Wendt (cf. [QV]), peut-être atteint aussi bien en dénouant chaque facteur de la somme connexe qu'en ne respectant pas cette somme connexe.

2) Un cas particulier du problème précédent a reçu beaucoup d'attention (cf. [Lic_1], [GLa_1]). Il reste toujours ouvert: « les entrelacs de nombre

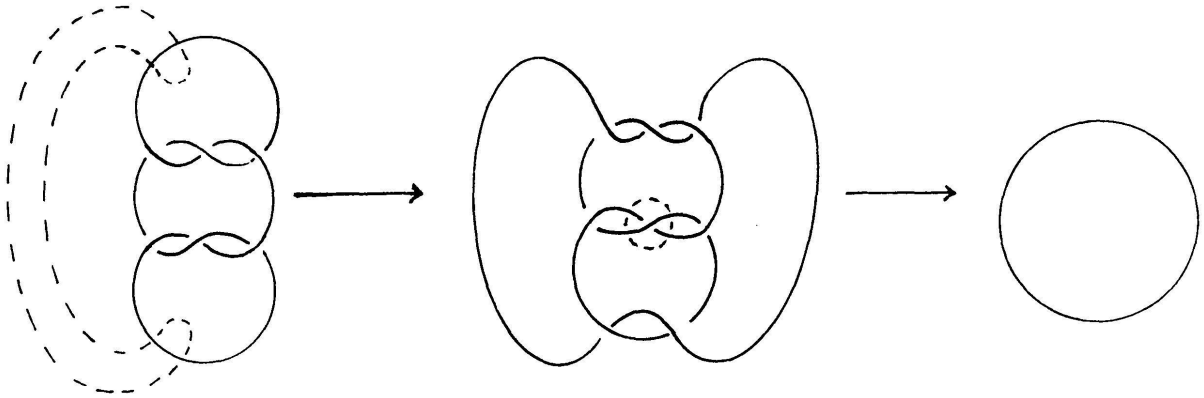


FIGURE 8

(La trace d'une boule dans laquelle s'effectue une opération de dénouement est marquée en pointillés sur le plan de projection du nœud).

gordien 1 sont-ils premiers? »

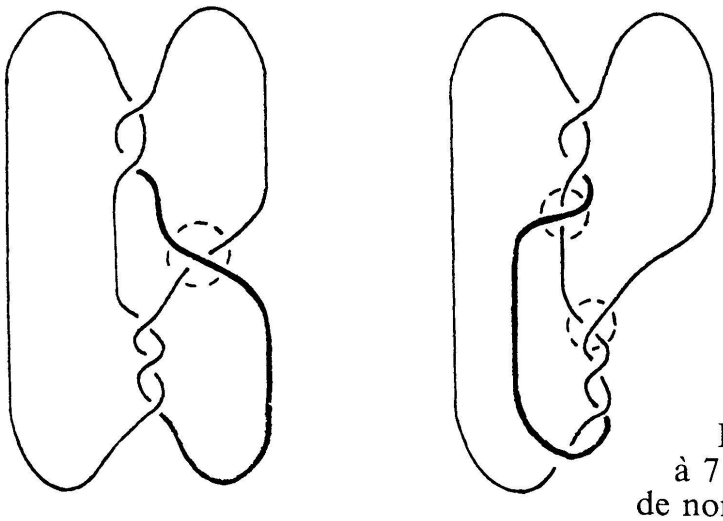
J. C. Gomez Larrañaga ([GLa_1], [GLa_2]) a su montrer que, dans certains cas, les nœuds de nombre gordien 1 sont premiers.

B — Une question importante, et semble-t-il difficile est le calcul pratique du nombre gordien d'un entrelacs. En particulier: 1) « Existe-t-il un procédé algorithmique, même théorique, pour calculer effectivement le nombre gordien d'un entrelacs? »

Note. Un tel procédé existe d'après W. Haken [Hak], pour calculer le genre de Seifert d'un nœud.

2) Si on veut utiliser une bonne projection, c'est-à-dire la définition 1, pour calculer le nombre gordien d'un entrelacs, le problème principal est de trouver sur quelle projection effectuer le calcul.

Il est certain que le nombre gordien d'un entrelacs n'est pas le nombre



Projection minimale à 6 croisements, de nombre gordien 1

Projection à 7 croisements, de nombre gordien 2

FIGURE 9

gordien de n'importe quelle bonne projection de cet entrelacs, comme le montre l'exemple du nœud 6_2, qui a une projection minimale à 6 croisements de nombre gordien 1, et une projection à 7 croisements de nombre gordien 2 (voir figure 9). Les cercles en pointillés entourent les croisements que l'on peut changer pour dénouer la projection. Le brin, tracé en trait fort, est le brin que l'on bouge pour passer d'une projection à une autre.

3) Une conjecture du folklore affirme « qu'il existe une bonne projection minimale de l'entrelacs telle que le nombre gordien de cette projection soit le nombre gordien de l'entrelacs ».

Cette conjecture a son origine dans le fait que le nombre gordien d'une bonne projection d'un entrelacs est majoré par la moitié du nombre de croisements de cette projection (cf. la remarque après la définition 1 au § 3); elle n'est pour l'instant infirmée par aucun des exemples connus dans la tabulation des nœuds jusqu'à 9 croisements (sur 84 nœuds ayant au plus 9 croisements, on a pu calculer le gordien de 71 nœuds; voir Nakanishi [Na] et Lickorish-Rickard [Lic_2].

Une conjecture encore plus optimiste semble être : « le nombre gordien d'un entrelacs est le nombre gordien de n'importe quelle projection minimale ». Il pourrait être intéressant pour cette dernière conjecture d'étudier les projections minimales d'un nœud double, qui est toujours un nœud de nombre gordien 1.

4) Lorsqu'on se restreint au cas particulier des entrelacs alternés, on peut se demander « si le nombre gordien d'un entrelacs alterné est égal au nombre gordien d'une projection alternée réduite » (c'est-à-dire sans croisements triviaux du type ou).

Une réponse affirmative à cette question entraînerait une réponse affirmative à l'additivité du nombre gordien par rapport à la somme connexe des entrelacs alternés, d'après la caractérisation géométrique des entrelacs alternés non premiers, donnée par W. Menasco [Me].

5) Comme illustration de ce qui précède, nous conjecturons que « le nombre gordien du nœud alterné à deux ponts associé au plombage $\overset{2a}{\bullet}\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\overset{-2b}{\bullet}$, $a > 0$, $b > 0$ (noté $2a2b$ chez J. C. Conway [Co]) est égal à $\inf(a, b)$ ».

C'est en fait le nombre gordien de la projection alternée (peut-être minimale?) donnée sur la figure 10.

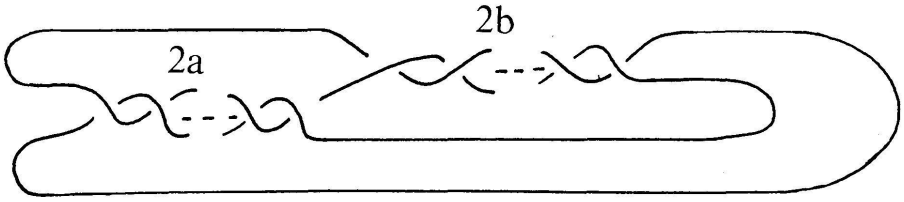


FIGURE 10

Cette conjecture est vraie si $a = 1$ ou $b = 1$. Elle peut être démontrée dans le cas $a = b = 2$ en utilisant la forme d'enlacement du revêtement double ramifié comme cela a été fait par Lickorish et Rickard (cf. [Lic_2]).

Une réponse positive à cette conjecture fournirait une famille de nœuds de genre 1 et de nombre gordien arbitrairement grand (cf. § 5, E et F), mais qui ne seraient pas fibrés.

C — Soit $\hat{\beta}$ une tresse fermée à n brins, munie de l'orientation naturelle des tresses fermées. Comme au § 4, notons r le nombre de composantes connexes de $\hat{\beta}$ et c la longueur algébrique de $\hat{\beta}$ (c'est-à-dire la somme exponentielle du mot β).

1) D. Bennequin [Be] a posé la question : « a-t-on la minoration suivante pour le nombre gordien de $\hat{\beta}$:

$$\frac{1}{2}(|c|-n+r) \leqslant u(\hat{\beta})\,? \text{ »}$$

Nous avons montré au § 4 que cette minoration est vraie pour le nombre gordien de la projection associée à la présentation en tresse fermée.

Si cette inégalité était vérifiée, cela impliquerait une réponse positive à la conjecture de J. Milnor et, plus généralement, à la conjecture du § 4 sur le nombre gordien des tresses fermées positives (dans ce cas-là $|c| = b$).

Cette inégalité semble donc être la généralisation naturelle de la conjecture de J. Milnor au cas des tresses fermées quelconques. On peut cependant remarquer que, lorsque le nombre de brins n est grand par rapport à r, cette minoration n'a que peu d'intérêt.

Note. L. Rudolph a observé que le nombre gordien d'un entrelacs est toujours égal au nombre gordien d'une projection associée à une présentation en tresse fermée de cet entrelacs.

En effet, dans la démonstration d'Alexander qu'un entrelacs admet toujours une présentation en tresse fermée, on peut orienter convenablement les arêtes des croisements que l'on change pour dénouer l'entrelacs, pour qu'elles ne soient pas touchées par le processus d'Alexander.

D — Il pourrait sembler logique de comparer le nombre gordien $u(K)$ d'un nœud K et le nombre de ponts $p(K)$ de ce nœud (pour une définition de $p(K)$ voir [Sch] ou [Ro_1, ch. 4-D]), puisque ces deux invariants sont liés aux projections du nœud.

De plus : i) $u(K)$ et $p(K)$ sont grossièrement majorés tous les deux par le nombre minimal de croisements de K.

ii) On a les inégalités : $e(K) \leqslant u(K)$ (inégalité de Wendt, cf. § 5-E), et $e(K)$

$\leqslant p(K) - 1$, où $e(K)$ désigne le rang du module d'Alexander de K. En effet le groupe d'un nœud à p ponts admet une présentation avec p générateurs méridiens, et le calcul différentiel libre de Fox [Fo_1] montre alors qu'on obtient une présentation du module d'Alexander avec $p - 1$ générateurs.

Cependant ces deux invariants n'ont aucun rapport entre eux. D'une part il existe des nœuds à 2 ponts de nombre gordien arbitrairement grand, par exemple les nœuds toriques $(2, 2n+1)$, $n \geqslant 1$, qui sont de nombre gordien n (*cf.* § 5 et [Mu]).

D'autre part, le double d'un nœud est toujours de nombre gordien 1, mais peut avoir un nombre de ponts arbitrairement grand : le double itéré n fois du nœud de trèfle a un nombre de ponts $p = 2^{n+1}$ d'après Schubert [Sch].

E — Il existe dans la littérature bien d'autres invariants géométriques d'un entrelacs qui sont liés au nombre gordien et qui donnent lieu à des inégalités (cf. par exemple T. Shibuya [Shb]). Cependant ces invariants semblent aussi difficiles à calculer que le nombre gordien et n'ont donné lieu jusqu'à présent à aucune méthode explicite de calcul.

BIBLIOGRAPHIE

[A] A'Campo, N. Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I. *Math. Ann. 213* (1975), 1-32.

[Be] Bennequin, D. *Entrelacements et Structures de contact.* Thèse. Paris 1982.

[Bi] Birman, J. *Braids, Links and Mapping Class Group.* Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press 1974.

[BW] Boileau, M. et C. Weber. *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques.* Publication interne. Genève (1983).

[Co] Conway, J. H. An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties. In *Computational Problems in Abstract Algebra,* Pergamond Press (1970), 329-358.

[Fo_1] Fox, R. A quick trip through knot theory. In *Topology of 3-Manifolds and Related Topics,* Englewood Cliffs, Prentice-Hall (1962), 120-167.

[Fo_2] —— Characterization of Slices and Ribbons. *Osaka J. Math. 10* (1973), 69-76.

[Fu] Fulton, W. *Algebraic Curves.* Math. Lecture Note series, W. A. Benjamin, Inc, 1969.

[GLa_1] Gomez-Larrañaga, J. C. *Knot Primeness.* Thesis Cambridge University (1981).

[GLa_2] —— Totally knotted knots are prime. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 91* (1982), 467-472.

[GoL] Gordon, C. McA. and R. A. Litherland. On the signature of a link. *Invent. Math. 47* (1978), 53-70.

[Gor] Gordon, C. McA. Some aspect of classical knot theory. In *Knot theory.* Springer Lecture Notes 685 (1978), 1-60.

[Hak] HAKEN, W. Theorie der Normalflächen. *Acta Math. 105* (1961), 245-375.

[Hau] HAUSSMANN, J. C. (éditeur). *Knot Theory.* Proc. of a Conference at Plans-sur-Bex (1977), Springer Lecture Notes 685 (1978).

[Hi] HILLMAN, J. A. *Alexander Ideals of Links.* Springer Lecture Notes 895 (1980).

[HS] HSIANG, W. C. and R. H. SZCZARBA. On embedding surfaces in four-manifolds. *Proc. symp. Pure Math. 22* (1971), 97-103.

[Jo] JONES, B. W. *The Arithmetic theory of quadratic forms.* Math. Monographies (New York) 1950.

[Ka] KANENOBU, T. The augmentation subgroup of a pretzel link. *Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7* (1979), 363-384.

[Kin_1] KINOSHITA, S. On Wendt's theorem of knots. *Osaka Math. J. 9* (1958), 61-66.

[Kin_2] —— On Wendt's theorem of knots II. *Osaka Math. J. 10* (1958), 259-261.

[Kir] KIRBY, R. Problems in low dimensional topology. *Proc. Symp. Pure Math. 32* (1978), vol. 2, 273-312.

[KM] KERVAIRE, M. and J. MILNOR. On two-sphere in 4-manifolds. *Proc. Nat. Acad. Sciences 47* (1961), 1651-1657.

[Ko] KONDO, H. Knots of unknotting number 1 and their Alexander polynomials. *Osaka J. Math. 16* (1979), 551-559.

[KT] KAUFFMAN, L. R. and L. R. TAYLOR. Signature of links. *Trans. A.M.S. 216 (1976)*, 351-365.

[Lev] LEVINE, J. Knot cobordism groups in codimension two. *Comment. Math. Helv. 44* (1969), 229-244.

[Lic_1] LICKORISH, W. B. R. Prime knots and tangles. *Trans. A.M.S. Soc. 267* (1981), 321-332.

[Lic_2] —— The unknotting number of a classical knot. Preprint 1982.

[Lit] LITHERLAND, R. A. Signature of iterated torus knots. In *Topology of Low-Dimensional Manifolds*, Springer Lecture Notes 722 (1979), 71-84.

[Ma] MATUMOTO, T. On the signature invariants of a non-singular complex sesqui-linear form. *J. Math. Soc. Japan 29* (1977), 67-71.

[Me] MENASCO, W. Incompressible surfaces in the complement of alternating knots and links. Preprint 1981.

[Mi_1] MILNOR, J. *Singular Points of Complex Hypersurfaces.* Ann. Math. Studies 61, Princeton Univ. Press 1968.

[Mi_2] —— *Morse Theory.* Ann. Math. Studies 51, Princeton Univ. Press 1963.

[Mi_3] —— Link groups. *Ann. of Math. 59* (1954), 177-195.

[Mi_4] —— Isotopy of links. In *Algebraic Geometry and Topology*, a Symposium in honour of S. Lefschetz, Princeton Univ. Press 1957, 280-306.

[Mu] MURASUGI, K. On a certain numerical invariant of link types. *Trans. A.M.S. 117* (1965), 387-422.

[Na] NAKANISHI, Y. A note on unknotting number. *Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9* (1981), 99-108.

[Ne] NEZHINSKII, V. M. The calculation of signatures and defects of elementary links (Russian). *Studies in topology*, Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. 36 (1973), 134-145.

[Pi] PINKHAM, H. C. On the Überschneidungszahl of algebraic knots. Preprint 1974.

[Po] POPOV, S. A. Almost smooth two-dimensional submanifolds of four-dimensional manifolds and some link invariants (Russian). *Studies in topology*, Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. 36 (1973), 146-154.

[Qa] QUACH, T. C. V. *Invariants des nœuds fibrés.* Thèse, Genève 1981.

[QW] QUACH, T. C. V. et C. WEBER. Famille infinie de nœuds fibrés cobordants à zéro et ayant même polynôme d'Alexander. *Comment. Math. Helv. 54* (1979), 562-566.

[Re] REIDEMEISTER, K. Knotentheorie. In *Ergebnisse der Mathematike*, Vol. 1 (1932), reprints Chelsea (1948) et Springer-Verlag (1974).

[Ro_1] ROLFSEN, D. *Knots and Links*. Math. Lecture Series 7, Publish or Perish Inc., Berkeley 1976.

[Ro_2] —— A surgical view of Alexander's polynomial. In *Geometric Topology*, Springer Lecture Notes 438 (1975), 415-423.

[Ro_3] —— Isotopy of links in codimension two. *J. Indian Math. Soc. 36* (1972), 263-278.

[Rh] ROHLIN, V. A. Two dimensional submanifolds of four-dimensional manifolds. *Functional Analysis and its Applications 5* (1971), 39-48.

[Ru] RUDOLPH, L. Seifert ribbons for closed braids. Preprint 1981.

[Saa] SAKAMOTO, K. The Seifert matrices of Milnor fibering defined by holomorphic functions. *J. Math. Soc. Japon 26* (1974), 714-721.

[Sak] SAKUMA, M. The homology groups of abelian coverings of links. *Math. Sem. Notes Kobe Univ. 7* (1979), 515-530.

[Sam] SAMUEL, P. *Lectures on old and new results on algebraic curves*. Tata Inst. Lecture Notes (1966).

[Sch] SCHUBERT, H. Über eine numerische Knoten Invariante. *Math. Z. 61* (1954), 245-288.

[Sei] SEIFERT, H. Über das Geschlecht von Knoten. *Math. Ann. 110* (1934), 571-592.

[Ser] SERRE, J. P. *Groupes algébriques et corps de classe*. Hermann (Paris) 1959.

[Shb] SHIBUYA, T. Some relations among various numerical invariants for links. *Osaka J. Math. 11* (1974), 313-322.

[Shm] SHINOHARA, Y. On the signature of knots and links. *Trans. A.M.S. 156* (1971), 273-285.

[St_1] STALLINGS, J. On fibering certain 3-manifolds. In *Topology of 3-Manifolds and Related Topics*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall (1962), 95-100.

[St_2] —— Construction of fibred knots and links. *Proc. Symp. Pure Math. 32* (1978), vol. 2, 55-60.

[Tri] TRISTRAM, A. G. Some cobordism invariants for links. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 66* (1969), 251-264.

[Tro] TROTTER, H. F. On S-equivalence of Seifert matrices. *Invent. Math. 20* (1973), 173-207.

[Vi] VIRO, O. Branched covering of manifolds with boundary and link invariants I. *Math. USSR Izvestija 7* (1973), 1239-1256.

[Wad] WALDHAUSEN, F. On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. *Ann. of Math. 87* (1968), 56-88.

[Wak] WALKER, R. *Algebraic Curves*. Princeton Univ. Press 1950, reprint Springer-Verlag 1978.

[We] WENDT, H. Die Gordishe Auflösung von Knoten. *Math. Z. 42* (1937), 680-696.

(Reçu le 14 avril 1983)

Michel Boileau, Claude Weber

Section de mathématiques
2-4, rue du Lièvre
Case postale 124
1211 Genève 24
Suisse