

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 30 (1984)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DE J. MILNOR SUR LE NOMBRE GORDIEN DES NŒUDS ALGÈBRIQUES  
**Autor:** Boileau, Michel / Weber, Claude  
**Kapitel:** §1. Genre des courbes planes et conjecture de R. Thom  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-53827>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 12.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Les détails de plusieurs démonstrations se trouvent dans le manuscrit multi-copié [BW], du même titre que cet article.

Nous tenons à remercier Daniel Bennequin, Lê Dung Trang et Françoise Michel des nombreuses discussions que nous avons eues sur les sujets traités ici. L'enthousiasme de Lê pour la conjecture de J. Milnor est très contagieux!

Le plan de cet article est le suivant :

- § 1. Genre des courbes planes et conjecture de R. Thom.
- § 2. Genres de Murasugi et de Seifert des entrelacs.
- § 3. Nombre gordien des entrelacs.
- § 4. Le problème de Milnor.
- § 5. Relations entre le nombre gordien et d'autres invariants de la théorie des entrelacs.
- § 6. Signatures.
- § 7. Quelques problèmes liés au nombre gordien.

### § 1. GENRE DES COURBES PLANES ET CONJECTURE DE R. THOM

Soit  $C$  une courbe algébrique dans  $\mathbf{CP}^2$ , irréductible. Il existe donc un polynôme homogène  $F(X, Y, Z)$  irréductible, tel que  $C$  est constituée par les zéros de  $F$ . Par définition le degré de  $C$  est le degré du polynôme  $F$ .

Supposons  $C$  lisse. Alors, du point de vue différentiable,  $C$  est une surface close, connexe, orientée. Elle a un genre topologique  $g$  et une version du théorème de Riemann-Roch (connue aussi sous le nom de théorème de Plücker) affirme que:  $2g = (d-1)(d-2)$ .

*Références*: W. Fulton [Fu]; R. Walker [Wak].

En fait ce théorème se trouve dans quasiment tous les livres sur les courbes planes.

Par le théorème de Bezout, le degré  $d$  peut être interprété topologiquement en disant que la classe fondamentale  $[C] \in H_2(C; \mathbf{Z})$  est homologue dans  $\mathbf{CP}^2$  à  $d$  fois la classe représentée par le générateur canonique  $\mathbf{CP}^1 \hookrightarrow \mathbf{CP}^2$ . On a toujours  $d > 0$ . Ceci justifie la définition qui suit.

Soit  $F$  une surface topologique dans  $\mathbf{CP}^2$ . Supposons  $F$  close, connexe, orientée. On dira que  $F$  est de degré  $d$  si la classe fondamentale  $[F]$  est homologue dans  $\mathbf{CP}^2$  à  $d$  fois  $[\mathbf{CP}^1]$ . Quitte à changer l'orientation de  $F$ , nous supposerons toujours  $d \geq 0$ .

Ceci étant précisé, nous pouvons énoncer la

CONJECTURE DE R. THOM. Soit  $F$  une surface différentiable, close, connexe, orientée dans  $\mathbf{CP}^2$ . Supposons que  $F$  est de degré  $d > 0$ . Alors le genre de  $F$  est supérieur ou égal à  $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ .

Commentaires. 1) Contrairement à la formule de Plücker -Riemann-Roch, on ne peut pas s'attendre à une égalité. En effet, si on change  $F$  en  $F \# T^2$ , où  $T^2$  désigne le tore  $S^1 \times S^1$  et où  $\#$  désigne une somme connexe, on voit que le degré ne change pas tandis que le genre augmente d'une unité.

2) La conjecture est fautive si on demande seulement que  $F$  soit plongée topologiquement (ou P.L.). En fait M. Kervaire et J. Milnor [KM] ont montré que, pour tout  $d \geq 0$ , il existe une sphère P.L., localement plate sauf en un point, qui est de degré  $d$ .

3) Bien sûr, pour tout  $d \geq 1$ , il existe une courbe algébrique lisse de degré  $d$ . Par exemple celle correspondant au polynôme  $x^d + y^d + z^d = 0$ .

4) Un cas très particulier de la conjecture affirme qu'une sphère différentiable  $S^2$  dans  $\mathbf{CP}^2$  est de degré plus petit ou égal à 2. La question de savoir quels éléments de  $H_2(M; \mathbf{Z})$  peuvent être représentés par une sphère différentiable a été étudiée pour la première fois par Kervaire-Milnor. ( $M$  est une variété différentiable de dimension 4, simplement connexe). Le cas particulier de  $\mathbf{CP}^2$  a été résolu par A. Tristram. (Voir le § 6; nous verrons que seules les classes de degré  $\leq 2$  peuvent être représentées par une  $S^2$  différentiable.)

Envisageons maintenant la situation où  $C$  n'est pas nécessairement lisse. En ce cas, la théorie locale des singularités nous permet de décrire  $C$  de la façon suivante:

- a) L'ensemble  $\Sigma$  des points singuliers de  $C$  est fini.
- b) Pour chaque point singulier  $z \in \Sigma$ , il existe une petite boule  $D_z$  de dimension réelle 4, centrée en  $z$  telle que:
  - i)  $\partial D_z$  rencontre  $C$  transversalement
  - ii)  $D_z \cap \Sigma = \{z\}$
  - iii) la paire  $(D_z, D_z \cap C)$  est homéomorphe au cône de centre  $z$  sur la paire  $(\partial D_z, \partial D_z \cap C)$ .

Comme l'intersection est transverse,  $\partial D_z \cap C$  constitue un entrelacs orienté dans  $\partial D_z$ . Notons  $r_z$  le nombre de composantes connexes de cet entrelacs. Par définition, le nœud ou entrelacs  $L_z$  est un entrelacs algébrique, à ne pas confondre avec les entrelacs algébriques de F. Bonahon et L. Siebenmann pour qui l'adjectif algébrique a une autre signification.

Soit  $\check{C} = C \cap (\mathbf{CP}^2 - \bigcup_{z \in \Sigma} \mathring{D}_z)$ .

$\check{C}$  est une surface différentiable (en fait  $\mathbf{C}$ -analytique) connexe (car  $C$  est irréductible), orientée (par l'orientation venant des complexes), à bord. Le nombre de composantes connexes du bord  $\partial\check{C}$  est égal à  $\sum_{z \in \Sigma} r_z$ .

Par définition, le genre topologique  $g$  de  $C$  est égal au genre de la surface  $\bar{C}$  obtenue en attachant un disque de dimension 2 à chaque composante de  $\partial\check{C}$ .

La formule de Riemann-Roch dans le cas d'une courbe avec singularités dit alors que :

$$\frac{(d-1)(d-2)}{2} = g + \sum_{z \in \Sigma} \delta_z$$

(nous rappellerons la définition de  $\delta_z$  un peu plus loin).

*Références*: J. P. Serre [Ser]; P. Samuel [Sam].

*Quelques commentaires sur les objets topologiques.*

Un entrelacs orienté est la donnée d'une famille finie de courbes différentiables orientées, plongée dans  $S^3$  (ou  $\mathbf{R}^3$ ). Un nœud est un entrelacs à une composante.

Deux tels entrelacs sont équivalents s'il existe un homéomorphisme de  $S^3$ , de degré +1, envoyant l'un des entrelacs sur l'autre, en conservant les orientations de chaque composante.

Dans notre cas les entrelacs algébriques  $L_z$  sont orientés par l'orientation complexe du morceau de courbe algébrique  $D_z \cap C$ , dont  $L_z$  est le bord.

Pour éviter chaque fois de longues périphrases, définissons le genre d'une surface de la façon suivante :

Soit  $G$  une surface compacte orientable. Soient  $G_1, G_2, \dots, G_s$  les composantes connexes de  $G$ . Soit  $\bar{G}_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , la surface close obtenue à partir de  $G_i$  en attachant un disque sur chaque composante connexe de  $\partial G_i$ . Alors par définition, le genre de  $G$  est la somme des genres des  $\bar{G}_i$ ,  $1 \leq i \leq s$ . C'est aussi le genre de la somme connexe des  $G_i$  (ou des  $\bar{G}_i$ ).

*Commentaires sur  $\delta_z$ .*

On définit  $\delta_z$  en géométrie algébrique de la façon suivante: on considère l'anneau local en  $z$ :  $\mathcal{O}_z$  et sa clôture intégrale  $\mathcal{O}'_z \supset \mathcal{O}_z$ . Alors, par définition :

$$\delta_z = \dim_{\mathbf{C}} \frac{\mathcal{O}'_z}{\mathcal{O}_z}.$$

Nous allons nous intéresser maintenant à une interprétation topologique de l'entier  $\delta_z$  donnée par J. Milnor.

A l'aide d'une carte affine contenant la boule  $D_z$  nous pouvons supposer que nous avons une fonction polynomiale  $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , avec  $f(0) = 0$ , et que 0 est une singularité isolée de  $f$ .

Finalement, pour une petite boule  $D$  centrée en  $0 \in \mathbb{C}^2$ , nous pouvons supposer que la paire  $(D, D \cap f^{-1}(0))$  est isomorphe, via la carte, à la paire  $(D_z, D_z \cap C)$ .

Alors, pour  $t$  suffisamment proche de 0,  $f^{-1}(t) \cap \partial D$  est un entrelacs équivalent à  $L_z$ . Cet entrelacs orienté  $K$  borde dans  $D$  le morceau de courbe lisse  $f^{-1}(t) \cap D = X_t = X$ .

Rappelons que, pour  $t$  et  $t'$ , non nuls, suffisamment proches de 0, les paires  $(D, X_t)$  et  $(D, X_{t'})$  sont difféomorphes.

*Référence:* J. Milnor [Mi<sub>1</sub>].

Comme J. Milnor, notons  $\mu$  l'entier  $\dim_{\mathbb{Z}} H_1(X; \mathbb{Z})$ . J. Milnor démontre que l'on a nécessairement :

$$2\delta = \mu + r - 1$$

Il est important pour la compréhension de cet article d'avoir une idée de la démonstration de la formule de Milnor. Nous en donnons donc une esquisse.

*Cas particulier:* supposons que  $\Sigma$  est réduit à un seul point, noté  $z$ .

Comme les entrelacs  $L_z$  et  $K$  ont même type, il est facile de construire une surface différentiable  $F$  dans  $\mathbb{C}P^2$  en recollant  $\check{C}$  avec  $X$ .  $F$  est une surface close, connexe et orientée.

Alors, un calcul facile, qui utilise que  $\check{C}$  et  $X$  sont toutes deux connexes, montre que :

$$\text{genre de } F = \text{genre de } C + \frac{1}{2}(\mu + r - 1)$$

Milnor montre alors qu'il y a une courbe lisse  $C'$ , isotope à  $F$ . Ceci est une conséquence du fait que nous avons supposé  $\Sigma$  réduit à un point.

Par construction, on a :

$$\text{genre de } F = \text{genre de } C' = g'$$

et

$$\text{degré de } C = \text{degré de } F = \text{degré de } C' = d.$$

$$\text{Par Riemann-Roch: } \frac{(d-1)(d-2)}{2} = g' \text{ et } \frac{(d-1)(d-2)}{2} = g + \delta.$$

Le calcul du genre de  $F$  montre alors que  $\delta = \frac{1}{2}(\mu + r - 1)$ .

Finalement, Milnor donne dans son livre un argument pour se ramener au cas particulier (voir [Mi<sub>1</sub>], p. 88 à 91). Plus précisément, il montre que tout germe est équivalent à droite à un germe satisfaisant les conditions du cas particulier.

Nous donnerons au § 4 une interprétation (classique) de  $\delta_z$  en termes de « points doubles proches ».

Au § 5 nous donnerons une autre notion de genre d'une surface, que nous appellerons le grand genre. Elle permet de bien voir pourquoi  $\delta$  est la contribution locale au genre de  $C'$ .

## § 2. GENRES DE MURASUGI ET DE SEIFERT DES ENTRELACS

Soit  $K$  un entrelacs orienté dans  $S^3$ . Il est bien connu depuis H. Seifert qu'il existe des surfaces compactes orientées  $U \subset S^3$ , dont le bord orienté est  $K$ . Dans ce qui suit, nous supposerons toujours que  $U$  n'a aucune composante connexe close.  $U$  est appelée une surface de Seifert de  $K$ .

Le genre de Seifert de  $K$ , noté  $s(K)$ , est le minimum des genres des surfaces de Seifert de  $K$ .

Nous allons maintenant nous intéresser aux entrelacs orientés qui sont fibrés.

*Références*: J. Hillman [Hi]; D. Rolfsen [Ro<sub>1</sub>].

Les faits suivants sur les entrelacs fibrés sont classiques:

- a) Les entrelacs algébriques sont fibrés. (C'est le théorème de Milnor, voir [Mi<sub>1</sub>]).
- b) Les surfaces de Seifert d'un entrelacs fibré sont toutes connexes. En voici brièvement la raison: l'homologie en dimension 1 du revêtement cyclique infini associé à l'orientation de l'entrelacs est de type fini sur  $\mathbf{Z}$ , puisque ce revêtement a le type d'homotopie de la fibre; s'il existe une surface de Seifert non connexe, l'homologie en question n'est pas de type fini.
- c) N'importe quelle surface de Seifert de  $K$ , de genre minimum, est isotope à une fibre de la fibration. Cela résulte essentiellement de la démonstration du théorème de fibration de J. Stallings (cf. [St<sub>1</sub>]). (Si on veut que l'isotopie reste fixe sur le bord, il faut utiliser F. Waldhausen [Wad].)
- d) Milnor démontre dans son théorème de fibration que, si  $L$  est un entrelacs algébrique, la fibre de la fibration est difféomorphe au morceau de courbe algébrique que nous avons appelé  $X$  au § 1. Par définition,

$$\dim_{\mathbf{Z}} H_1(X; \mathbf{Z}) = \mu$$