L'Enseignement Mathématique, t. 30 (1984), p. 331-338

DISTRIBUTION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

par Jean-Louis Nicolas

Abstract. Let $F(x)$ be the number of integers m such that $\phi(m) \leqslant x$, where ϕ is the Euler function.

An asymptotic formula is given for $F(x)$ with an error term. The method is elementary, and goes through various estimations of sums involving arithmetical functions.

Soit $\phi(n)$ la fonction d'Euler, et soit

$$F(x) = \sum_{\phi(n) \leqslant x} 1 .$$

Il est facile de voir que cette somme est finie (cf. par exemple [Par], ch. 1, ex. 25) et il est connu que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{F(x)}{x} = C = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = \frac{\zeta(2)\,\zeta(3)}{\zeta(6)},$$

où $\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-s}$ est la fonction de Riemann. La première démonstration due à P. Erdös (cf. [Erd]), est basée sur l'existence d'une fonction de distribution pour $n/\phi(n)$. R. E. Dressler a donné (cf. [Dre]) une deuxième démonstration, élémentaire, en approchant $\phi(n)$ par les fonctions

$$\phi_k(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leqslant p_k}} (1 - 1/p),$$

où p_k désigne le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. Enfin P. Bateman (cf. [Bat]), par des méthodes de variables complexes, a fourni des estimations de la forme:

$$F(x) = C\,x + O(x \exp(-c(\log x)^a))$$

pour diverses valeurs de c et de a.