**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
**Band:** 33 (1987)
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** FORMULES POUR LES TRISÉCANTES DES SURFACES ALGÉBRIQUES
**Autor:** Barz, Patrick
**Kapitel:** III) Trisécantes dans $P^4$: les calculs
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-87886

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

**Download PDF:** 18.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

d) *Conclusion*

Soit $S$ une surface de $\mathbf{P}^4$ à singularités ordinaires et $\Sigma/\mathbf{C}$ le schéma relatif associé défini en I.3.b. Posons $\bar{U} = \mathbf{C}$ et $U = \mathbf{C}^*$. Nous allons voir que les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites pour le schéma relatif $\Sigma/\mathbf{C}$.

Pour a), cela résulte de la proposition 4 ii). Pour b), cela résulte de la proposition 6 ii), chaque composante de $\mathrm{Hilb}^3\,\Sigma_0$ étant génériquement réduite. Enfin le schéma $\Sigma/\mathbf{C}^*$ est isomorphe au produit $S \times \mathbf{C}^*$ par construction même (remarque 3). Donc par la remarque 1, $\Sigma/\mathbf{C}^*$ est $k$-plat, puisque $S \subset \mathbf{P}^4$ n'a que des singularités ordinaires. L'hypothèse c) de la proposition 1 est donc satisfaite.

La proposition 1 donne alors l'équivalence rationnelle dans $\mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4$:

$$[\mathrm{Hilb}_c^3\,S] \sim [\mathrm{Hilb}_c^3\,\Sigma_0]\,.$$

Or par la proposition 6 i), on a l'égalité des cycles:

$$[\mathrm{Hilb}_c^3\,\Sigma_0] = [\mathrm{Hilb}_c^3\,S'] + [\overline{S_{21}}] + [S_3]\,.$$

D'où pour n'importe quel cycle $Z$ de $A^3(Al^3\,\mathbf{P}^4)$, l'égalité des 0-cycles:

$$Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,S] = Z\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,S'] + Z\,.\,i^*\,[\overline{S_{21}}] + Z\,.\,i^*\,[S_3]\,.$$

Des lemmes 3, 4 et 5 résulte alors aussitôt la proposition 5 que l'on cherchait à prouver.

## III) Trisécantes dans $\mathbf{P}^4$: les calculs

Soit $S$ une surface de $\mathbf{P}^4$ d'invariants $n$, $d$, $t$ (notations du § II). On va donner deux formules trisécantes pour $S$, supposée à singularités ordinaires dans $\mathbf{P}^4$.

### 1°) Tangentes à $S$ recoupant $S$ et une droite fixée.

Nous cherchons le degré du 0-cycle

$$[\mathscr{D}]\,.\,\mathrm{Axe}^*\sigma_2\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}_c^3\,S]$$

où comme d'habitude, $i: Al^3\,\mathbf{P}^4 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3\,\mathbf{P}^4$ est l'injection canonique. Ici, $\mathscr{D} \subset Al^3\,\mathbf{P}^4$ est l'hypersurface des triplets alignés non simples et $\sigma_2 = (1, 4)$ est le cycle de $A^2(G(1, 4))$ des droites de $\mathbf{P}^4$ coupant une droite fixe $\Delta$. D'après la proposition 5, ce nombre est de la forme

$$T(S) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) .$$

a) Avant de commencer le calcul des six coefficients, regardons le cas où $S$ est singulière avec $\delta$ points-doubles impropres. Soit $O$ l'un de ces points. Il engendre avec $\Delta$ un plan $P$ recoupant $S$ en $n-2$ autres points et non pas $n-3$ (voir IV.1.c.i). Or chacune des $n-2$ droites joignant $O$ à l'un de ces $n-2$ points est une droite coupant $S$ suivant un triplet non simple (car double en $O$). C'est une « fausse » tangente à $S$. Donc il faudra, pour avoir le nombre de « vraies » tangentes à $S$, retrancher de $T(S)$ ces $\delta(n-2)$ fausses tangentes par les points-doubles de $S$. Mais il faut le faire bien sûr en comptant la multiplicité.

Un calcul montre alors (Annexe 8) que cette multiplicité est 2. C'est tout à fait analogue au fait que la *classe* d'une courbe plane avec $\delta$ points-doubles ordinaires est $n(n-1) - 2\delta$ puisqu'on doit retrancher les droites, comptant deux fois, qui passent par les points-doubles.

b) Soit alors $\tilde{S}$ la réunion de $S$ et d'un plan $P$ générique de $\mathbf{P}^4$. Essayons d'évaluer $T(\tilde{S})$. D'après le lemme 9 (Annexe 1) $\mathrm{Hilb}_c^3 \tilde{S}$ se décompose en quatre composantes (réduites)

$$\begin{cases} \mathrm{Hilb}_c^3 S \\ \overline{\mathrm{Hilb}^2 S_0 \times P_0} \\ \overline{S_0 \times \mathrm{Hilb}^2 P_0} \\ \mathrm{Hilb}_c^3 P \end{cases}$$

où $S_0 = S - P$ et $P_0 = P - S$; la barre est l'adhérence dans $\mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$.

On a donc, si $i : Al^3 \mathbf{P}^4 \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ est l'injection canonique,

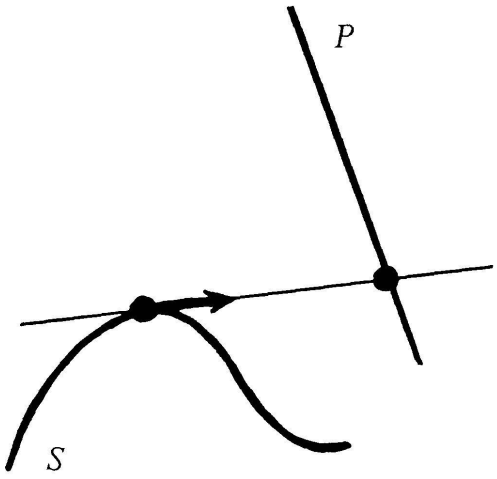
$$i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 \tilde{S}]$$
$$= i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 S] + i^* [\overline{\mathrm{Hilb}^2 S_0 \times P_0}] + i^* [\overline{S_0 \times \mathrm{Hilb}^2 P_0}] + i^* [\mathrm{Hilb}_c^3 P] .$$

Pour obtenir $T(\tilde{S})$, on intersecte avec $[\mathscr{D}] . \mathrm{Axe}^* \sigma_2$ dans $A^\cdot(Al^3 \mathbf{P}^4)$. Le premier terme va donc donner par définition $T(S)$ et le dernier $T(P)$. Le troisième terme, lui, va donner $O$ car une droite dans $P$ ne recoupe pas une droite fixée générique.

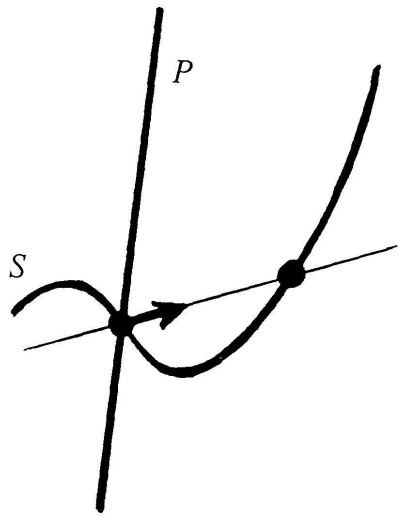
Reste à voir la contribution du deuxième terme. Rappelons qu'on cherche des triplets *non simples*. Deux cas sont à distinguer :

— ou le point-double est sur $S$ et le point simple sur $P$,

— ou deux points simples sont sur $S$ et le point-double provient de la rencontre avec $P$ en l'un des points-simples.




Premier cas




Deuxième cas

*Dans le premier cas*, le nombre cherché est $n(n-1)$. En effet, il s'agit du nombre de tangentes à $S$ coupant un plan $P$ fixé et une droite fixée. Par la formule de Pieri, on a dans $A^{\cdot}(G(1,4))$:

$$(1,4)\,.\,(2,4) = (0,4) + (1,3)\,.$$

Il s'agit donc du nombre de tangentes à $S$ passant par un point fixe $O$ plus le rang ($\mu_1$) d'une section hyperplane. C'est donc $\nu + 2\delta$ d'une part (il faut bien compter, *et avec multiplicité 2*, les $\delta$ fausses tangentes à $S$ passant par $O$ et l'un des $\delta$ points-doubles impropres de $S$) et d'autre part $\mu_1 = n(n-1) - 2d$ ([34], p. 190) car une section hyperplane de $S$ a degré $n$ et $d$ points-doubles apparents.

Soit au total $n(n-1)$ car $2d = \nu + 2\delta$ (cf. Annexe 6). La multiplicité est 1 car $P$ est choisi générique.

*Dans le deuxième cas*, vu ce qu'on a dit au début de ce paragraphe, il s'agit de « fausses » tangentes à $\tilde{S}$ par l'un des $n$ points d'intersection de $P$ et $S$. Donc on doit les compter $2n(n+1-2)$ puisque $\tilde{S}$ est de degré $n+1$.

Au total, la contribution du deuxième terme dans $T(\tilde{S})$ est $3n(n-1)$. On a donc montré la relation

$$T(\tilde{S}) = T(S) + T(P) + 3n(n-1)\,,$$

soit en utilisant le lemme 13 de l'Annexe 5:

$$a_1(n+1) + a_2\binom{n+1}{2} + a_3\binom{n+1}{3} + \alpha(t+d) + (d+n)\left(\beta(n+1)+\gamma\right)$$
$$= a_1 n + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n+\gamma) + a_1 + 3n(n-1)\,.$$

(Il vient $T(P) = a_1$ car alors $n = 1$, $d = t = 0$). Or le lemme 12 (Annexe 5) permet d'identifier les coefficients ce qui donne:

pour $d$: $\alpha + \beta = 0$,

pour $n$: $\begin{cases} -\gamma = a_2 - a_3 + 6 & \text{(on a fait } n = -1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma = 0 & \text{(on a fait } n = 1)\,. \end{cases}$

Il reste à trouver trois autres équations. On remarque tout d'abord que ni un plan, ni une quadrique de $\mathbf{P}^3$ plongée dans $\mathbf{P}^4$ n'ont de trisécante rencontrant une droite fixe. On a donc $T = 0$ pour ces deux surfaces, soit $a_1 = 2a_1 + a_2 = 0$. Ensuite, la surface $S(2, 2)$, intersection complète de deux hyperquadriques de $\mathbf{P}^4$, vérifie $T = 0$; car pour raison de degré, une trisécante est l'une des 16 droites qu'elle contient et aucune ne rencontre une droite fixe. Mais on connaît $n, d, t$ (Annexe 6) d'où

$$4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + 2(4\beta+\gamma) = 0\,.$$

Ces six équations ensemble forment un système inversible dont la solution est:

$$\begin{cases} a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = -6 \\ \alpha = -6 & \beta = 6 & \gamma = -12\,. \end{cases}$$

On a donc démontré (vu a)) le

THÉORÈME 1. *Soit $S$ une surface à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$, d'invariants $n, d, t$. Alors le degré du 0-cycle*

$$[\mathscr{D}]\,.\,\mathrm{Axe}^*\sigma_2\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}^3_c\,S]$$

(nombre de tangentes à $S$ recoupant $S$ et une droite fixe) *est*

$$6\left(d(n-2) - \binom{n}{3} - t\right).$$

*Et les $\delta$ points-doubles impropres éventuels de $S$ contribuent de $2\delta(n-2)$ dans ce nombre.*

2°) TANGENTES D'INFLEXION COUPANT UN PLAN FIXÉ

Nous cherchons cette fois le degré $T(S)$ du 0-cycle

$$[\mathscr{T}] \,.\, \mathrm{Axe}^*\sigma_1 \,.\, i^* \,[\mathrm{Hilb}^3_c \, S] \,.$$

Cette fois, $\mathscr{T} \subset Al^3 \, \mathbf{P}^5$ est la sous-fibration en $\mathscr{T}_0 \subset \mathrm{Hilb}^3 \, \mathbf{P}^1$ formée des triplets alignés de support un point. ($\mathscr{T}_0$ a la structure d'une cubique gauche dans $\mathrm{Hilb}^3 \, \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^3$). Le cycle $\sigma_1$ de $A^1(G(1, 4))$, encore noté (2, 4), est formé des droites coupant un plan $\pi$ fixé.

Toujours d'après la proposition 5, le nombre $T(S)$ est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) \,.$$

a) Avant de chercher les six coefficients, regardons le cas où $S$ est singulière avec $\delta$ points-doubles impropres.

Soit $O$ l'un de ces points. Chacun des plans tangents $P_1$ (resp. $P_2$) à $S$ en $O$ coupe le plan $\pi$ fixé en un point $m_1$ (resp. $m_2$). Les deux triplets alignés de support $\{O\}$ et d'axe $\overline{Om_1}$ (resp. $\overline{Om_2}$) sont dans $S$ et interviennent donc dans $T(S)$. Cependant, ces droites sont de « fausses » tangentes d'inflexion. *L'Annexe 8 b) montre qu'elles comptent avec multiplicité 3.* On devra donc retrancher de $T(S)$ le nombre $6\delta$ de façon à obtenir le nombre de « vraies » tangentes d'inflexion. Ceci est analogue au fait que pour une courbe plane ayant seulement $\delta$ points-doubles ordinaires, on doit retrancher $6\delta$ à $3n(n-2)$ pour avoir le nombre de « vrais » points d'inflexion ([34], p. 78).

b) Soit, comme en 1), $\tilde{S}$ la réunion de $S$ et d'un plan $P$. On obtient, avec les mêmes notations :

$$i^* \,[\mathrm{Hilb}^3_c \, \tilde{S}]$$

$$= i^* \,[\mathrm{Hilb}^3_c \, S] + i^* \,[\overline{\mathrm{Hilb}^2 \, S_0 \times P_0}] + i^* \,[\overline{S_0 \times \mathrm{Hilb}^2 \, P_0}] + i^* \,[\mathrm{Hilb}^3_c \, P] \,.$$

Pour obtenir $T(\tilde{S})$, on intersecte avec $[\mathscr{T}] \,.\, \mathrm{Axe}^*\sigma_1$ ; le premier terme va donc donner par définition $T(S)$ et le dernier : $T(P) = a_1$. Reste à voir la contribution des deuxième et troisième termes.

D'après a), elle est de $3n$ pour chacun d'eux. En effet, pour chaque point d'intersection $O$ de $S$ et $P$, il y a deux triplets alignés de support $\{O\}$ coupant un plan fixe $\pi$ : l'un dans $T_0 S$ et l'autre dans $P$ ; et chacun compte, vu a), avec la multiplicité 3. On a donc montré la relation

$$T(\tilde{S}) = T(S) + a_1 + 6n\,,$$

soit comme précédemment:

$$a_1(n+1) + a_2\binom{n+1}{2} + a_3\binom{n+1}{3} + \alpha(t+d) + (d+n)\,(\beta(n+1)+\gamma)$$

$$= a_1 n + a_2\binom{n}{2} + a_3\binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n+\gamma) + a_1 + 6n\,.$$

Grâce à l'Annexe 5, on peut identifier comme précédemment en $d$ et $n$, d'où

$$\alpha + \beta = 0\,, \quad -\gamma = a_2 - a_3 - 6 \quad \text{et} \quad a_2 + 2\beta + \gamma = 6$$

comme équations.

Il reste à en trouver trois autres. La surface $S(2, 2)$ contient 16 droites dont aucune ne coupe un plan fixe; donc $T(S(2, 2)) = 0$. D'où comme plus haut: $4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + 2(4\beta+\gamma) = 0$. Enfin, par un calcul énumératif simple (Annexe 9), on a $T(S(2, 3)) = 60$ et $T(S(2, 4)) = 192$ d'où deux dernières équations:

$$\begin{cases} 6a_1 + 15a_2 + 20a_3 + 6(6\beta+\gamma) = 60 & \text{car on connaît } (n, d, t) \\ 8a_1 + 28a_2 + 56a_3 + 12(8\beta+\gamma) = 192 & \text{pour ces surfaces (Annexe 6)}\,. \end{cases}$$

Ces six équations ensemble forment un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = -3 & a_2 = -6 & a_3 = 12 \\ \alpha = 6 & \beta = -6 & \gamma = 24\,. \end{cases}$$

On a donc démontré, vu a), le

THÉORÈME 2. *Soit $S$ une surface à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$, d'invariants $n, d, t$. Alors le degré du 0-cycle $[\mathscr{T}]\,.\,\mathrm{Axe}^*\sigma_1\,.\,i^*\,[\mathrm{Hilb}^3_c\,S]$ (nombre de tangentes d'inflexion à $S$ coupant un plan fixe) est*

$$n(n-4)\,(2n-1) + 6\big(t-d(n-4)\big)\,.$$

*Et les $\delta$ points-doubles impropres éventuels de $S$ contribuent de $6\delta$ dans ce nombre.*