

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 33 (1987)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: FORMULES POUR LES TRISÉCANTES DES SURFACES ALGÈBRIQUES
Autor: Barz, Patrick
Kapitel: Première partie : P^4
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-87886>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

puisque X est supposé intersection de quadriques. L'exemple le plus simple est évidemment le volume X intersection complète de quatre quadriques, où l'on trouve ainsi 512 droites (ce qu'on vérifie directement dans $G(1, 7)$).

De même, si $X \subset \mathbf{P}^6$ est un tel volume, le degré de la surface réglée formée des droites dans X est donné par $t_6(V)$ où $V = X \cap \mathcal{H}_3$ comme précédemment.

Première partie: $\mathbf{P}^4$

I) RAPPELS ET DÉFINITIONS; SCHÉMAS Σ ET Σ_0

1°) $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$, $Al^k \mathbf{P}^N$ ET FORMULES k -SÉCANTES

On rappelle rapidement les notions introduites dans [24] et [25].

a) Le corps de base est algébriquement clos de caractéristique nulle; on se place sur $\mathbf{C}$ pour la commodité.

Si $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^N$ désigne le schéma de Hilbert [10] des k -uplets de $\mathbf{P}^N$ (sous-schémas de dimension 0 et longueur k), on désignera par $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ l'ouvert formé des k -uplets *curvilignes* c'est-à-dire situés sur une courbe non-singulière. L'ouvert $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ est en général non dense [15], mais en tout cas non-singulier [24] de dimension Nk . Il contient l'ouvert $\text{Hilb}_\neq^k \mathbf{P}^N$ des k -uplets formés de points *distincts* comme ouvert dense.

Les k -uplets de $\mathbf{P}^N$ qui sont sous-schémas d'une droite, appelée *axe* du k -uplet, sont dits *alignés*. Ils forment une sous-variété non-singulière de dimension $2N + k - 2$, notée $Al^k \mathbf{P}^N$, de $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$. On a une fibration naturelle, au-dessus de la grassmannienne des droites:

$$\text{Axe}: Al^k \mathbf{P}^N \rightarrow G(1, N)$$

qui à un- k -uplet aligné fait correspondre son axe. La fibre-type est $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^k$.

Exemples et notations. Un doublet est toujours aligné. Si (x, y) sont les coordonnées de $\mathbf{C}^2$, le triplet d'idéal (x^2, xy, y^2) n'est pas curviligne; le triplet d'idéal $(x^3, y + x^2)$ est curviligne mais non aligné. On notera $\rightarrow$ un doublet de support réduit à un point. Un triplet curviligne de support réduit à un point sera noté $\curvearrowright$ et s'il est aligné, on le notera $\xrightarrow{3}$. Remarquons par exemple que le quadruplet $\rightarrow \rightarrow$ est aligné, mais celui-ci: $\rightarrow \uparrow$ ne l'est pas, bien qu'évidemment le réduit associé le soit!

b) Définissons maintenant le cycle des k -sécantes d'une surface de $\mathbf{P}^N$.

Soit $S \subset \mathbf{P}^N$ une surface et $i: Al^k \mathbf{P}^N \hookrightarrow \text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ l'injection canonique. Comme $\text{Hilb}^k S$ s'identifie à un sous-schéma de $\text{Hilb}^k \mathbf{P}^N$ (par exemple [8]), notons $\text{Hilb}_c^k S$ la trace de $\text{Hilb}^k S$ sur $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$. Le cycle associé $[\text{Hilb}_c^k S]$ de $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$ est de dimension $2k$ et donc le cycle

$$i^* [\text{Hilb}_c^k S]$$

appartient à $A^{k(N-2)}(Al^k \mathbf{P}^N)$ où A^* désigne l'anneau de Chow, gradué par la codimension. Soit Z un cycle fixé dans $Al^k \mathbf{P}^N$, de dimension complémentaire. On appellera formule k -sécante pour S dans $\mathbf{P}^N$, une formule donnant le degré d'un 0-cycle $Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^k S]$ lorsque le cycle Z est fixé.

Exemple. $N = 4, k = 4$; dans ce cas Z doit appartenir à $A^2(Al^4 \mathbf{P}^4)$. Un exemple de formule quadrisécante pour les surfaces de $\mathbf{P}^4$ est donc: les quadrisécantes rencontrant une droite fixe. Dans ce cas, on prend $Z = \text{Axe} * \sigma$ où $\sigma \in A^2(G(1, 4))$ est le cycle de Schubert des droites coupant une droite fixe.

Dans la suite de cet article, on ne s'intéressera qu'aux formules tri-sécantes pour une surface. On renvoie à [28] pour les autres cas.

2°) PLATITUDE ET ÉQUIVALENCE RATIONNELLE

La proposition 1 démontrée dans ce paragraphe est le cœur de l'article. Elle permet de remplacer $\text{Hilb}_c^k S$ par $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$.

a) Comme d'habitude, si V est un sous-schéma du schéma H , on désigne par $[V]$ le cycle associé. Commençons par montrer le

LEMME 1. Soit $\bar{U}$ un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant 0 et 1 et soit $U = \bar{U} - \{0\}$. Soit H un schéma.

On se donne un sous-schéma réduit Z de $H \times U$ qu'on suppose plat sur U ; soit $\bar{Z}$ son adhérence dans $H \times \bar{U}$. Si la fibre $\bar{Z}_0$ est génériquement réduite, on a l'équivalence rationnelle dans H :

$$[Z_1] \sim [\bar{Z}_0] = [(\bar{Z}_0)_{\text{red}}].$$

Preuve. Vu ([14], prop. 1.4) et ([11], I.9.5.9 et I.9.5.10), $\bar{Z}$ est l'unique sous-schéma relatif de $H \times \bar{U}$, plat sur $\bar{U}$, dont la restriction à U est Z . (De plus $\bar{Z}$ est réduit). Par définition de l'équivalence rationnelle, vu la platitude de $\bar{Z}$ sur $\bar{U}$, on a $[\bar{Z}_1] \sim [\bar{Z}_0]$. Mais $\bar{Z}_1 = Z_1$ et $[\bar{Z}_0] = [(\bar{Z}_0)_{\text{red}}]$ par hypothèse, ce qui démontre le lemme.

Donnons maintenant une définition :

Définition 1. Soit U un ouvert de $\mathbf{C}$ et soit X/U un schéma relatif. On dit que X/U est k -plat si le schéma de Hilbert relatif

$$\mathrm{Hilb}_c^k X/U$$

est plat sur U et réduit.

Remarque 1. Le cas le plus évident, qui nous intéressera principalement, est celui où X/U est isomorphe à un produit $F \times U$. Dans ce cas, on a l'isomorphisme $\mathrm{Hilb}_c^k X/U \simeq (\mathrm{Hilb}_c^k F) \times U$. Ce schéma relatif étant un produit, est plat. Il suffit donc de supposer $\mathrm{Hilb}_c^k F$ réduit, ce qui est toujours le cas si F est non-singulier (car alors $\mathrm{Hilb}_c^k F$ est aussi non-singulier) ou bien si F est une surface à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$ (voir Annexe 1).

On peut de manière analogue montrer le

LEMME 2. Si X/U est un schéma relatif lisse, le schéma relatif $\mathrm{Hilb}_c^k X/U$ est également lisse, donc plat et réduit. Ainsi X/U est k -plat.

Preuve. Soit $\pi: X \rightarrow U$ la projection et x un point de X . Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ (disons transcendant) de x et un isomorphisme $\mathcal{V} \xrightarrow{\sim} U' \times F$ au-dessus d'un voisinage U' de $\pi(x)$, où F est non-singulier. Alors on a $\mathrm{Hilb}_c^k \mathcal{V}/U' \simeq (\mathrm{Hilb}_c^k F) \times U'$; or $\mathrm{Hilb}_c^k F$ est non-singulier, d'où la lissité.

b) Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer la

PROPOSITION 1. Soit $\bar{U}$ un ouvert de $\mathbf{C}$ contenant 0 et 1 et soit $U = \bar{U} - \{0\}$. Soit $H = \mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$.

Soit $X/\bar{U}$ un sous-schéma relatif de $\mathbf{P}^N \times \bar{U}$. On suppose :

- tout k -uplet curviligne dans la fibre X_0 est limite de k -uplets curvilignes dans des fibres X_λ , avec $\lambda \neq 0$, de X/U ;
- $\mathrm{Hilb}_c^k X_0$ est génériquement réduit;
- le schéma relatif X/U est k -plat (déf. 1).

Alors on a l'équivalence rationnelle dans $\mathrm{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N$:

$$[\mathrm{Hilb}_c^k X_1] \sim [(\mathrm{Hilb}_c^k X_0)_{\mathrm{red}}] = [\mathrm{Hilb}_c^k X_0].$$

Preuve. Considérons le schéma relatif $Z/U = \mathrm{Hilb}_c^k X/U$. Par l'hypothèse c), Z est plat sur U et réduit. D'autre part Z est contenu dans le

schéma relatif $\text{Hilb}_c^k X/\bar{U}$ et ce dernier est fermé dans $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N \times \bar{U}$. Par définition de l'adhérence, on a donc l'inclusion

$$\bar{Z} \subset \text{Hilb}_c^k X/\bar{U}.$$

C'est une inclusion *de schémas* puisque $\bar{Z}$ est réduit. On en déduit l'inclusion *de schémas* entre les fibres :

$$(1) \quad \bar{Z}_0 \subset \text{Hilb}_c^k X_0.$$

Maintenant l'hypothèse a) signifie précisément l'inclusion $(\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}} \subset \bar{Z}$. Comme $(\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}}$ est contenu dans la fibre en 0 de $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^N \times \bar{U}$, on a donc l'inclusion

$$(2) \quad (\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}} \subset \bar{Z}_0.$$

On a donc montré

$$(3) \quad (\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}} \subset \bar{Z}_0 \subset \text{Hilb}_c^k X_0.$$

Or l'hypothèse b) assure que $\text{Hilb}_c^k X_0$ est génériquement réduit; donc $\bar{Z}_0$ aussi, d'après (3). Les hypothèses du lemme 1 sont donc satisfaites pour Z et l'on a ainsi, vu (3):

$$[Z_1] \sim [\bar{Z}_0] = [\text{Hilb}_c^k X_0] = [(\text{Hilb}_c^k X_0)_{\text{red}}].$$

Or par définition même, $Z_1 = (\text{Hilb}_c^k X/U)_1 = \text{Hilb}_c^k X_1$. La proposition 1 est donc démontrée.

c) *Nous allons donner pour l'instant comme application de cette proposition, un corollaire technique qui peut être sauté en première lecture. Par singularités ordinaires d'une surface S' dans $\mathbf{P}^3$ nous entendons uniquement croisements normaux, points-triples et points-pince.*

PROPOSITION 2. *Soit $S' \subset \mathbf{P}^3$ une surface à singularités ordinaires, de degré n . Alors pour tout cycle K dans $A^*(\text{Al}^3 \mathbf{P}^3)$, de dimension 3, le degré du 0-cycle*

$$K \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S']$$

est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où a_1, a_2, a_3 sont des constantes ne dépendant que de K .

(Comme toujours, $i: Al^3 \mathbf{P}^3 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$ désigne l'injection canonique.) Remarquons que $\text{Hilb}_c^3 S'$ est génériquement réduit par l'Annexe 2: S' n'a que des singularités ordinaires.

Preuve. Soit M la réunion de n plans en position générale dans $\mathbf{P}^3$, tous transverses à S' . Soit f_0 une équation de S' et f_2 une équation de M .

Considérons le sous-schéma relatif $X/\mathbf{C}$ de $\mathbf{P}^3 \times \mathbf{C}$ défini par l'équation

$$(\lambda - 2)f_0 + \lambda f_2 = 0$$

où λ parcourt $\mathbf{C}$. On a bien sûr $X_0 = S'$ et $X_2 = M$. Soit U l'ouvert maximal de $\mathbf{C}$ tel que X/U soit lisse au-dessus de U . Il est non vide et on peut toujours supposer que 1 lui appartient. Le schéma X/U est k -plat car il est lisse (lemme 2).

Soit $\bar{U}_0 = U \cup \{0\}$ et $\bar{U}_2 = U \cup \{2\}$. Les lemmes 10 et 11 de l'Annexe 2 montrent que les hypothèses a) et b) de la proposition 1 sont vérifiées: en effet localement au-dessus d'un voisinage de 0 ou 2, le schéma relatif X est isomorphe aux schémas relatifs Θ ou Π des lemmes 10 et 11. Cela résulte de ce que S' et M n'ont que des singularités ordinaires. On applique alors deux fois la proposition 1, en remplaçant l'une des deux fois 0 par 2 évidemment, et on trouve donc l'équivalence rationnelle:

$$[\text{Hilb}_c^k X_0] \sim [\text{Hilb}_c^k X_1] \sim [\text{Hilb}_c^k X_2],$$

soit encore

$$[\text{Hilb}_c^k S'] \sim [\text{Hilb}_c^k M].$$

On s'est donc ramené à montrer la proposition pour la réunion de n plans. Soit $P_1, P_2 \dots P_n$ les plans dont la réunion est M ; soit $k_1, k_2 \dots k_n$ des entiers positifs tels que $k_1 + k_2 + \dots + k_n = 3$ et soit $U_{k_1, k_2 \dots k_n}$ l'ensemble des triplets *simples* ayant k_i points sur P_i . D'après le lemme 10 (Annexe 2) le schéma $(\text{Hilb}_c^3 M)_{\text{red}}$ admet les adhérences $\overline{U_{k_1, k_2 \dots k_n}}$ comme uniques composantes irréductibles. Appelons « type » d'une telle composante l'ensemble des k_i non nuls. Ainsi $(\text{Hilb}_c^3 M)_{\text{red}}$ est formé de

$$\binom{n}{3} \text{ composantes irréductibles de type } \{1, 1, 1\},$$

$$2 \binom{n}{2} \text{ composantes irréductibles de type } \{2, 1\},$$

$$n \text{ composantes irréductibles de type } \{3\}.$$

De plus, deux composantes irréductibles de même type sont évidemment rationnellement équivalentes dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$, comme on le voit en faisant agir $PGL(3)$ sur les triplets de plans. Ainsi,

$$[\text{Hilb}_c^3 M] = [(\text{Hilb}_c^3 M)_{\text{red}}] = \binom{n}{3} A + \binom{n}{2} B + nC$$

où A, B et C sont trois cycles fixés dans l'anneau de Chow de $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$; d'où le résultat annoncé.

Remarque 2. Le lecteur adaptera sans peine la démonstration pour montrer que pour tout cycle $K \in A^*(A^k \mathbf{P}^3)$, de dimension k , le degré du 0-cycle $K \cdot i^* [\text{Hilb}_c^k S']$ est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + \dots + a_k \binom{n}{k}$$

où les a_i ne dépendent que de K .

3°) DÉFORMATION DE S EN Σ_0 ; ÉTUDE DE $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$

Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$. La définition donnée en 1) des formules k -sécantes pour S oblige à connaître la classe d'équivalence de $[\text{Hilb}_c^k S]$ dans l'anneau de Chow de $\text{Hilb}_c^k \mathbf{P}^4$.

L'idée qu'on va utiliser est de construire un schéma relatif Σ/C avec fibre $\Sigma_1 = S$, la fibre Σ_0 ayant pour réduit la projection S' de S sur un hyperplan générique H . On essayera alors d'arriver à l'équivalence rationnelle $[\text{Hilb}_c^k S] \sim [\text{Hilb}_c^k \Sigma_0]$ et d'utiliser la proposition 1. Considérons maintenant un schéma F . Si F est non-singulier, l'ouvert $\text{Hilb}_c^k F$ des k -uplets simples est dense dans $\text{Hilb}_c^k F$: car un k -uplet curviligne dans F est aussi contenu dans une courbe non-singulière Δ située sur F ; on le déforme alors en k points simples sur Δ . (Remarquer par contre que $\text{Hilb}_c^k F$ n'est en général pas dense dans $\text{Hilb}_c^k F$; voir [15]).

Remarque 3. C'est justement la présence de composantes immergées dans Σ_0 (de réduit S') qui fait qu'on a $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$ (ou $\text{Hilb}_c^k S'$) non dense dans $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$. En fait, on verra que $\text{Hilb}_c^k S'$ (qui est l'adhérence de $\text{Hilb}_c^k S'$) est seulement une composante irréductible de $\text{Hilb}_c^k \Sigma_0$, lequel scinde en plusieurs composantes. Et c'est l'évaluation de la contribution de chacune de ces composantes dans les formules k -sécantes qui constitue l'essentiel de la démonstration.

a) Commençons par décrire un procédé général de déformation d'un sous-schéma de $\mathbf{P}^N$.

Soit $Z \subset \mathbf{P}^N$ un schéma réduit et Z' sa projection sur un hyperplan H par un point générique ω . D'après ([14], prop. 1.4) ou encore ([13], III, ex. 9.8.3), il existe un sous-schéma réduit $\mathcal{Z}$ de $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$, plat sur $\mathbf{C}$, avec pour fibres $\mathcal{Z}_1 = Z$ et $(\mathcal{Z}_0)_{\text{red}} = Z'$. Rappelons pourquoi: On prend pour cela un système de coordonnées homogènes $(x_0 : x_1 : \dots : x_N)$ pour lequel H ait pour équation $x_N = 0$, le point ω étant le point $(0 : 0 : \dots : 0 : 1)$. Le schéma a la structure — réduite — de l'adhérence dans $\mathbf{P}^N \times \mathbf{C}$ de l'image de $Z \times \mathbf{C}^*$ par le plongement

$$Z \times \mathbf{C}^* \hookrightarrow \mathbf{P}^N \times \mathbf{C}^*$$

$$((x_0 : x_1 : \dots : x_{N-1} : x_N), \lambda) \mapsto ((x_0 : x_1 : \dots : x_{N-1} : \lambda x_N), \lambda).$$

En général, la fibre $\mathcal{Z}_0$ possède des composantes immergées (voir [13], p. 260).

Remarque 4. Si on pose $\bar{U} = \mathbf{C}$ et $U = \mathbf{C}^*$, le schéma relatif $\mathcal{Z}/U$ est plat puisqu'il est isomorphe au produit $Z \times U$.

b) Appliquons ce qui précède à une surface S à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$. On la projette génériquement en S' sur un hyperplan H . La sous-variété S' possède une courbe-double Γ , des points triples $M_1, \dots, M_t$ et des points-pinces $P_1, \dots, P_v$. Il s'agit d'abord d'établir la structure nilpotente de Σ_0 , sachant que $(\Sigma_0)_{\text{red}} = S'$. Nous pouvons énoncer deux propositions.

PROPOSITION 3. *Avec les notations précédentes, on a l'égalité des sous-schémas de $\mathbf{P}^4$:*

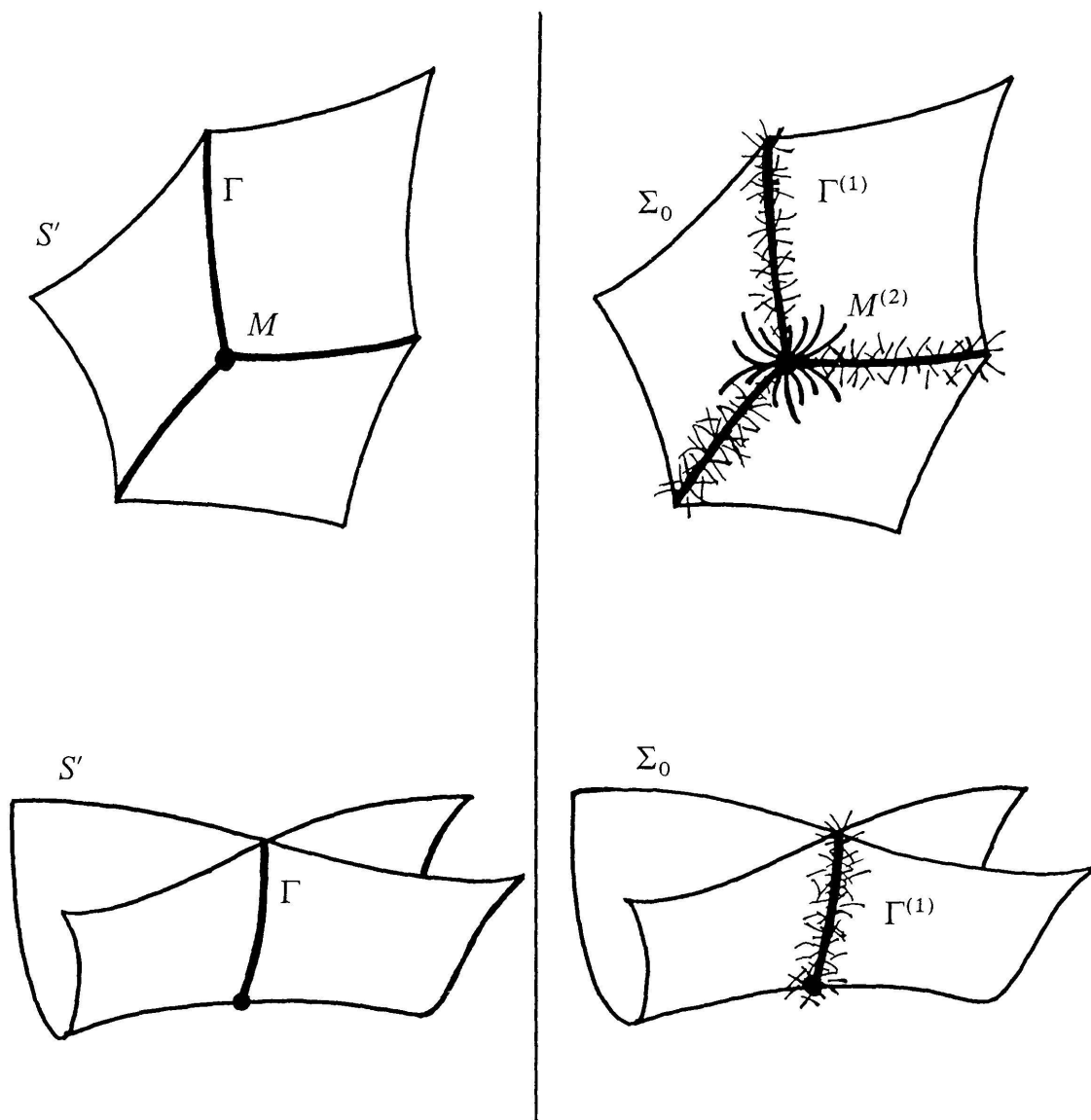
$$\Sigma_0 = S' \cup \Gamma^{(1)} \cup M_1^{(2)} \cup \dots \cup M_t^{(2)}$$

où pour $V \subset \mathbf{P}^4$, $V^{(i)}$ désigne le i -ème voisinage infinitésimal de V dans $\mathbf{P}^4$. De plus, $S' = (\Sigma_0)_{\text{red}} = \Sigma_0 \cap H$.

Dans le dessin ci-après les nilpotents sont dans $\mathbf{P}^4$; on a représenté les doublets (dans $\mathbf{P}^4$) par des traits courts et les triplets par des traits courbés plus longs.

Avant d'énoncer la proposition suivante, donnons une définition. Celle-ci est motivée par le fait, comme on l'a dit, que pour un schéma quelconque F , l'ouvert $\text{Hilb}_c^k F$ n'est en général pas dense dans $\text{Hilb}_c^k F$.

Définition 2. Appelons k -uplet « double » (resp. « triple »), une réunion disjointe de points simples et de doublets de support un point (resp. points



simples, doublets de support un point et triplets *curvilignes* de support un point).

Alors à défaut de pouvoir déformer tout k -uplet curviligne d'un schéma F en k -uplets simples, on peut espérer le déformer en k -uplets doubles, voire triples. C'est justement ce qu'affirme la proposition suivante (en i) pour le schéma Σ_0 .

PROPOSITION 4. Soit $\Sigma/\mathbb{C}$ le schéma relatif associé à une surface à singularités ordinaires S de $\mathbb{P}^4$, dont S' est la projection sur l'hyperplan H .

i) Tout k -uplet curviligne dans Σ_0 , de support un point-triple $\{M\}$, est limite (pour $k \geq 4$) de k -uplets triples dans Σ_0 .

Tout k -uplet curviligne dans Σ_0 de support un point-pince $\{P\}$, est limite (pour $k \geq 3$) de k -uplets doubles dans Σ_0 .

Tout k -uplet curviligne dans Σ_0 , de support un point de la courbe double Γ de S' , est limite (pour $k \geq 3$) de k -uplets double dans Σ_0 .

ii) Tout k -uplet curviligne dans Σ_0 est limite de k -uplets curvilignes dans des fibres Σ_λ de $\Sigma/\mathbb{C}$ avec $\lambda \neq 0$.

iii) $\text{Hilb}^3 \Sigma_0$ est réduit au voisinage d'un triplet curviligne t de support un point-triple $\{M\}$, lorsque $t \not\subset S' = (\Sigma_0)_{\text{red}} = \Sigma_0 \cap H$.

$\text{Hilb}^2 \Sigma_0$ est réduit au voisinage d'un doublet d de support un point-pince $\{P\}$, lorsque $d \not\subset S'$.

$\text{Hilb}^2 \Sigma_0$ est réduit au voisinage d'un doublet d de support un point de Γ , lorsque $d \not\subset S'$.

Preuves des propositions 3 et 4. Il s'agit essentiellement, par des calculs en coordonnées, de se ramener à l'étude de modèles locaux pour Σ_0 , d'abord au voisinage de la courbe double Γ , puis d'un point triple M et enfin d'un point pince. Or cette étude pour les modèles locaux a été faite dans [24]. Voir l'Annexe 3 pour tous les détails de calcul.

II) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^4$: LA THÉORIE

Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$ à singularités ordinaires. Notons n son degré, d le degré de la courbe double apparente et t le nombre de points-triples apparents, dans une projection générique sur un $\mathbf{P}^3$.

On regarde le diagramme, où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions sont entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccc}
 (9) & Al^3 \mathbf{P}^4 & \xrightarrow{i} \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4 & (12) \\
 & & \uparrow & \\
 & & \text{Hilb}_c^3 S & (6) .
 \end{array}$$

Le but de ce § II est de montrer la

PROPOSITION 5. Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$, d'invariants (n, d, t) . Pour tout cycle Z dans $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$, la formule trisécante donnant le degré du 0-cycle $Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S]$ est de la forme

$$T(S) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma)$$

où $a_1, a_2, a_3, \alpha, \beta$ et γ sont des constantes ne dépendant que de Z .

1°) COMPOSANTES DE $\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0$

a) Notons S' la projection de S sur un $\mathbf{P}^3$ générique de $\mathbf{P}^4$. S' admet une courbe double Γ avec t points-triples $M_1 \dots M_t$ et v points-pince. En I.3.b on a construit un schéma relatif $\Sigma/\mathbf{C}$ avec $\Sigma_1 = S$ et $(\Sigma_0)_{\text{red}} = S'$. De plus (proposition 3), on a

$$(*) \quad \Sigma_0 = S' \cup \Gamma^{(1)} \cup M_1^{(2)} \cup \dots \cup M_t^{(2)}$$

où $V^{(i)}$ désigne le i -ème voisinage infinitésimal de V dans $\mathbf{P}^4$; on a $\Sigma_0 \cap \mathbf{P}^3 = S'$.

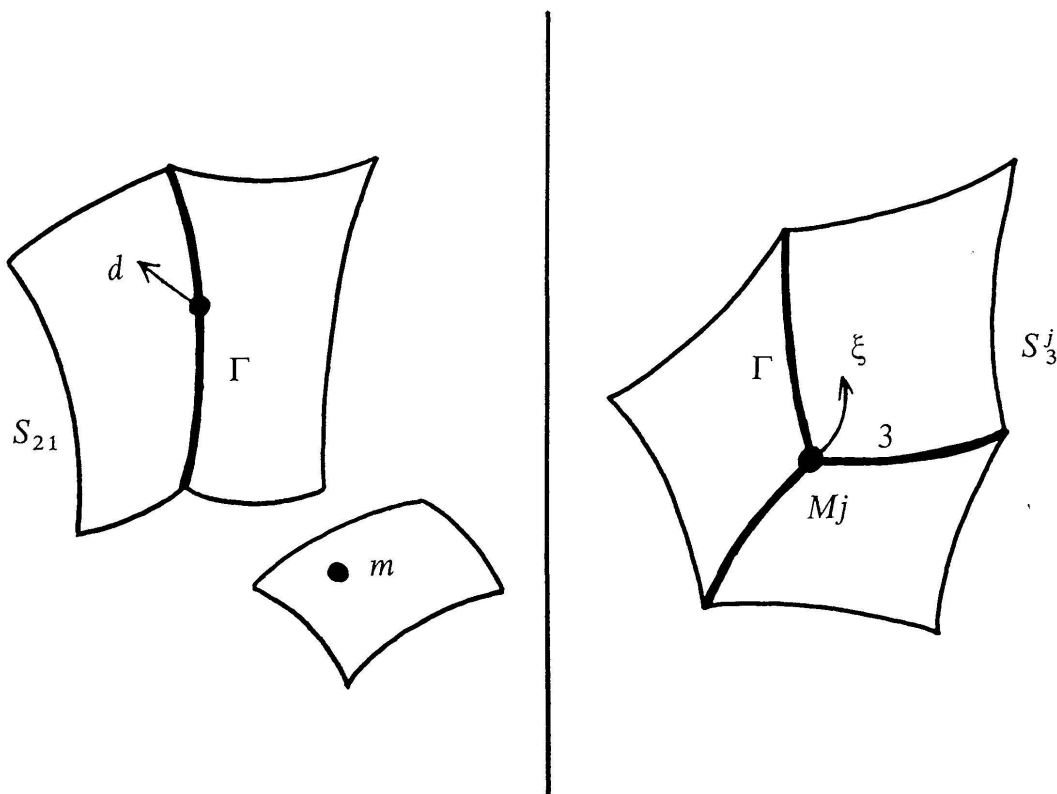
Nous allons détailler les différentes composantes du schéma $(\text{Hilb}^3 \Sigma_0)_{\text{red}}$.

Notation 1. Notons S_{21} la sous-variété (localement fermée) de $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ formée des triplets $t = d \cup m$ où

d est un doublet de $\mathbf{P}^4$ de support un point de Γ ,

m est un point de $S' - \Gamma$.

Soit $\overline{S_{21}}$ l'adhérence de S_{21} dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$.



Notons S_3^j pour $j = 1, 2 \dots t$ la sous-variété de $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ des triplets curvilignes ξ de $\mathbf{P}^4$, de support $\{M_j\}$. Soit S_3 leur réunion (disjointe).

Remarque 5. Bien sûr, $\overline{S_{21}}$ et S_3 sont contenus dans $(\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0)_{\text{red}}$ d'après la structure nilpotente même de Σ_0 (*).

b) On a la

PROPOSITION 6.

- i) $(\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0)_{\text{red}}$ est réunion de $(\text{Hilb}_c^3 S')_{\text{red}}$, de S_{21} et des S_3^j ($j = 1, 2 \dots t$).
- ii) $\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0$ est génériquement réduit le long de ces composantes.

Preuve. i) Soit t un triplet curviligne contenu dans Σ_0 . Si t est contenu dans l'hyperplan $\mathbf{P}^3$, comme $\Sigma_0 \cap \mathbf{P}^3 = S'$, on a $t \in (\text{Hilb}_c^3 S')_{\text{red}}$. Si $t \not\subset \mathbf{P}^3$, le support de t ne peut être formé de trois points simples, puisque $(\Sigma_0)_{\text{red}} = S'$ et $S' \subset \mathbf{P}^3$. Donc $\text{Supp } t$ rencontre Γ , car en dehors de Γ , les faisceaux structuraux de S' et Σ_0 sont égaux.

Premier cas. $\text{Supp } t = \{a, b\}$ avec $a \in \Gamma$ et t double en a . Si $b \notin \Gamma$, par définition, on a $t \in S_{21}$. Si $b \in \Gamma$, on le « bouge » en $b' \in S' - \Gamma$ et donc t appartient à $\overline{S_{21}}$.

Deuxième cas. $\text{Supp } t = \{a\}$ où $a \in \Gamma$. Si a est l'un des points-triples M_j , on a $t \in S_3$. Si a n'est pas l'un des points M_j , c'est soit un point-pince soit un point générique de Γ . Dans les deux cas, t est limite de triplets de support formé de deux points: en effet cela résulte de la proposition 4.

ii) La composante $\text{Hilb}_c^3 S'$ est génériquement réduite d'après les lemmes 10 et 11 de l'Annexe 2 puisque $S' \subset \mathbf{P}^3$ n'a que des singularités ordinaires. Par ailleurs S_3^j est génériquement réduite d'après la proposition 4 iii): un triplet générique de S_3^j n'est pas dans H . Enfin, montrons que S_{21} (donc $\overline{S_{21}}$) est génériquement réduit. Soit $d \cup m$ un triplet générique de S_{21} ; ainsi le support de d n'est pas un point triple et $d \not\subset H$. Alors $\text{Hilb}^2 \Sigma_0$ est réduit au voisinage de d par la proposition 4 iii); d'où S_{21} réduit au voisinage de $d \cup m$.

2°) CONTRIBUTION DE CES COMPOSANTES DANS $T(S)$

Soit $Z \in A^3(AI^3 \mathbf{P}^4)$ un cycle fixé. Nous allons montrer trois lemmes, avec les notations précédentes.

LEMME 3. Le degré du 0-cycle $Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S']$ est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où a_1, a_2 et a_3 ne dépendent que de Z .

LEMME 4. *Le degré du 0-cycle $Z.i^*[S_3]$ est de la forme αt où α ne dépend que de Z . (S_3 désigne la réunion disjointe des S_3^j pour $j=1, 2 \dots t$.)*

LEMME 5. *Le degré du 0-cycle $Z.i^*[\overline{S_{21}}]$ est de la forme $d(\beta n + \gamma)$ où β et γ ne dépendent que de Z .*

a) Prouvons le lemme 3. Regardons le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques et les dimensions entre parenthèses :

$$\begin{array}{ccccc}
 (9) & Al^3 \mathbf{P}^4 & \xhookrightarrow{i} & \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4 & (12) \\
 & \uparrow j & & \uparrow u & \\
 (7) & Al^3 \mathbf{P}^3 & \xhookrightarrow{\hat{i}} & \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3 & (9) \\
 & & & \uparrow & \\
 & & & \text{Hilb}_c^3 S' & (6) .
 \end{array}$$

Nous voyons par examen des dimensions que $Al^3 \mathbf{P}^4$ et $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^3$ ne se coupent pas proprement dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$.

Nous aurons besoin du théorème de l'intersection résiduelle [7] [17] sous forme de la formule de Fulton-MacPherson [6], qu'on énoncera ainsi :

THÉORÈME (Fulton-MacPherson). *Soit Y une sous-variété non-singulière de la variété non-singulière X . Soit A une sous-variété de X et $I = A \cap Y$. Considérons le diagramme commutatif où les flèches sont les injections canoniques :*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xhookrightarrow{i} & X \\
 \uparrow j & & \uparrow u \\
 I & \xhookrightarrow{\hat{i}} & Y .
 \end{array}$$

Si I est localement intersection complète dans A et si

$$\dim I = \dim A + \dim Y - \dim X + r,$$

alors pour tout cycle α dans Y , le cycle $i^*u_*\alpha$ dans A est égal à $j_*(C_r \cdot \hat{i}^*\alpha)$ où C_r est fixé dans $A^r(I)$.

L'Annexe 7 montre que $Al^3 \mathbf{P}^4$ et $Hilb_c^3 \mathbf{P}^3$ se coupent schématiquement en $Al^3 \mathbf{P}^3$. Appliquons alors la formule de Fulton-MacPherson à $\alpha = [Hilb_c^3 S']$ dans $A^1(Hilb_c^3 \mathbf{P}^3)$. Comme ici $r = 1$, on obtient

$$i^*u_*\alpha = i^*[Hilb_c^3 S'] = j_*C$$

où $C = C_1 \cdot \hat{i}^*[Hilb_c^3 S']$ avec C_1 fixé dans $A^1(Al^3 \mathbf{P}^3)$. Par suite, par la formule des projections, on a dans $A^1(Al^3 \mathbf{P}^4)$:

$$Z \cdot i^*[Hilb_c^3 S'] = Z \cdot j_*C = j_*(j^*Z \cdot C_1 \cdot \hat{i}^*[Hilb_c^3 S']).$$

Mais $K = j^*Z \cdot C_1$ appartient à $A^4(Al^3 \mathbf{P}^3)$ et donc par la proposition 2:

$$\deg Z \cdot i^*[Hilb_c^3 S'] = \deg K \cdot \hat{i}^*[Hilb_c^3 S']$$

est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3}$$

où a_1 , a_2 et a_3 sont des constantes. Le lemme 3 est donc prouvé.

b) Prouvons le lemme 4. Pour cela nous avons besoin d'un lemme auxiliaire:

LEMME 6. Désignons par I^j l'intersection ensembliste de S_3^j (défini dans ce paragraphe en 1.a) et de $Al^3 \mathbf{P}^4$ dans $Hilb_c^3 \mathbf{P}^4$.

Alors génériquement, S_3^j et $Al^3 \mathbf{P}^4$ se coupent transversalement; par suite $i^*[S_3^j] = [I^j]$.

Remarquer que I^j est isomorphe à $\mathbf{P}^3$ par le choix de l'axe du triplet passant par M_j .

Preuve du lemme 6. C'est un simple calcul en coordonnées, comme on en fera beaucoup dans l'Annexe: soit ξ_0 un triplet aligné de support $\{M_j\}$, d'axe transverse à $\mathbf{P}^3$ (l'hyperplan qui contient S'). Dans un système inhomogène de coordonnées (x, y, z, u) centré en M_j , S' a pour équations

$$xyz + \dots = 0, \quad u = 0$$

et l'axe ξ_0 est engendré par un vecteur de coordonnées $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Puisque ξ_0 est supposé générique dans I^j , on se ramène à $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ et l'idéal de ξ_0 est alors

$$I_0 = (x^3, y-x, z-x, u-x).$$

Une carte de $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ en ξ_0 est donnée par

$$(a, b, c, a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3)$$

correspondant à l'idéal voisin :

$$I = (x^3 + ax^2 + bx + c, y - x + a_1x^2 + b_1x + c_1, z - x + a_2x^2 + b_2x + c_2, \\ u - x + a_3x^2 + b_3x + c_3).$$

Dans cette carte, $Al^3 \mathbf{P}^4$ s'exprime par $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ et S_3^j par

- d'une part $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ car la courbe sur laquelle est le triplet curviligne doit passer par 0,
- d'autre part $a = b = c = 0$ car le support doit être $\{0\}$. Cela termine la démonstration du lemme 6.

Nous aurons besoin de rappeler la proposition suivante (montrée en [25]). C'est une conséquence facile du théorème de Leray-Hirsch, car

$$\text{Axe} : Al^k \mathbf{P}^N \rightarrow G(1, N)$$

est une fibration de fibre type $\mathbf{P}^k$.

PROPOSITION 7. *Soit i un entier et $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \dots \mathcal{H}_i$ des hyperplans de $\mathbf{P}^N$ en position générale. Pour $k \geq i$, soit H_i la sous-variété de $Al^k \mathbf{P}^N$ formée des k -uplets alignés ξ avec $\xi \cap \mathcal{H}_p \neq \emptyset$ pour $1 \leq p \leq i$. Alors on a l'égalité dans $A_{\mathbf{Q}}^*(Al^k \mathbf{P}^N)$ des sous-espaces vectoriels*

$$A_{\mathbf{Q}}^i(Al^k \mathbf{P}^N) \quad \text{et} \quad \bigoplus_{j=0}^i \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^{i-j}(G) \cdot [H_j].$$

(On note $A_{\mathbf{Q}}^* = A^* \otimes_{\mathbf{Z}}$ et $G = G(1, N)$).

Dans le cas qui nous occupe ($k=3$), on a donc en fixant $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3$ trois hyperplans de $\mathbf{P}^4$ en position générale, l'égalité :

$$A_{\mathbf{Q}}^3(Al^3 \mathbf{P}^4) \\ = \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^3(G) \oplus \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^2(G) \cdot [H_1] \oplus \text{Axe}^* A_{\mathbf{Q}}^1(G) \cdot [H_2] \oplus \mathbf{Q} [H_3].$$

Or il est bien connu par la décomposition de Schubert (voir par exemple [21]) que $A^*(G(1, 4))$ est donné par :

- $A^3(G) = \mathbf{Z}(0, 4) \oplus \mathbf{Z}(1, 3)$ où

$$\begin{cases} (0, 4) = \text{droites passant par un point fixe } 0 \text{ de } \mathbf{P}^4, \\ (1, 3) = \text{droites contenues dans un hyperplan } H' \text{ de } \mathbf{P}^4 \text{ et coupant} \\ \text{une droite } \Delta' \text{ de } H'. \end{cases}$$

$$- A^2(G) = \mathbf{Z}(1, 4) \oplus \mathbf{Z}(2, 3) \text{ où}$$

$$\begin{cases} (1, 4) = \text{droites coupant une droite } \Delta'' \text{ de } \mathbf{P}^4, \\ (2, 3) = \text{droites contenues dans un hyperplan } H'' \text{ de } \mathbf{P}^4. \end{cases}$$

$$- A^1(G) = \mathbf{Z}(2, 4) \text{ où}$$

$$(2, 4) = \text{droites coupant un plan fixe } \pi \text{ de } \mathbf{P}^4.$$

Pour montrer l'assertion du lemme 4, il suffit de la montrer pour Z décrivant une base de $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$. Mais on a (lemme 6) $Z \cdot i^* [S_3^j] = Z \cdot [I^j]$. Or dans la base énumérée ci-dessus de $A_Q^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$, seul le premier cycle $Axe^*(0, 4)$ a une intersection non vide avec I^j . En effet,

$$\begin{cases} Axe^*(1, 3) \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin H' \\ Axe^*(1, 4) \cdot [H_1] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1 \\ Axe^*(2, 3) \cdot [H_1] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1 \\ Axe^*(2, 4) \cdot [H_2] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1 \\ [H_3] \cdot [I^j] = 0 & \text{car } M_j \notin \mathcal{H}_1. \end{cases}$$

Notons alors α le degré d'intersection $Axe^*(0, 4) \cdot [I^j]$. (On peut se convaincre que c'est 1 par un calcul en coordonnées, mais c'est inutile pour la suite). Cela correspond à l'unique triplet aligné ξ_0 dans $\mathbf{P}^4$ de support $\{M_j\}$ et d'axe $\overline{OM_j}$. On a donc $\deg Axe^*(0, 4) \cdot i^* [S_3^j] = \alpha$ d'où $\deg Axe^*(0, 4) \cdot i^* [S_3] = \alpha t$ puisque $[S_3] = \sum_{j=1}^t [S_3^j]$.

L'assertion du lemme 4 est prouvée pour Z décrivant une base de $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$, donc le lemme 4 est démontré.

c) Prouvons le lemme 5. Nous aurons besoin comme en b), d'un lemme auxiliaire:

LEMME 7. Désignons par I l'intersection ensembliste de $\overline{S_{21}}$ (défini dans ce paragraphe en 1.a)) et de $Al^3 \mathbf{P}^4$ dans $Hilb_c^3 \mathbf{P}^4$. Alors génériquement, $\overline{S_{21}}$ et $Al^3 \mathbf{P}^4$ se coupent transversalement; par suite $i^* [S_{21}] = [I]$ dans $A^*(Al^3 \mathbf{P}^4)$.

La preuve du lemme 7 est un calcul en coordonnées comme le lemme 6: voir l'Annexe 4.

D'après ce lemme, pour prouver le lemme 5, il suffit de montrer que pour tout cycle Z dans $A^3((Al^3 P^4))$, le degré du 0-cycle $Z \cdot [I]$ est de la forme $d(\beta n + \gamma)$ où β et γ ne dépendent que de Z . Il suffit donc de le vérifier pour Z décrivant une base de $A_{\mathbb{Q}}^3(Al^3 P^4)$. Or une telle base a été explicitée en b), comme conséquence de la proposition 7. On utilise donc les mêmes notations qu'en b).

Il s'agit de voir que les degrés des 0-cycles

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \text{Axe}^*(0, 4) \cdot [I] \\ \text{ii) } \text{Axe}^*(1, 3) \cdot [I] \\ \text{iii) } \text{Axe}^*(1, 4) \cdot [H_1] \cdot [I] \\ \text{iv) } \text{Axe}^*(2, 3) \cdot [H_1] \cdot [I] \\ \text{v) } \text{Axe}^*(2, 4) \cdot [H_2] \cdot [I] \\ \text{vi) } [H_3] \cdot [I] \end{array} \right.$$

vérifient l'assertion du lemme 5.

Montrons-le rapidement cas par cas, toujours avec les notations de b). L'hyperplan de P^4 contenant la projection S' est noté P^3 .

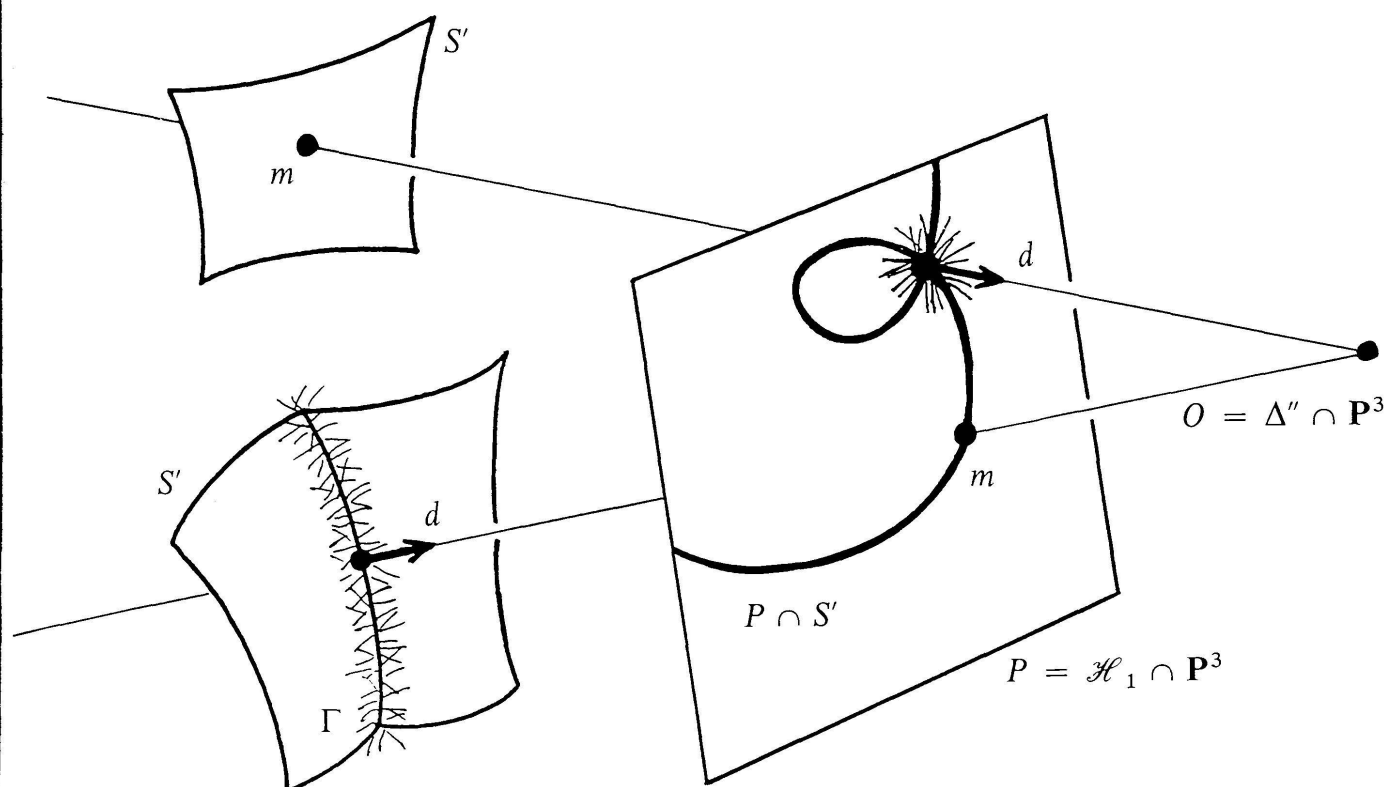
- i) Les axes des triplets éléments de I sont dans P^3 , donc ne peuvent rencontrer un point fixe O de P^4 . Le premier des degrés cherchés est donc O .
- ii) Les axes des triplets de I sont dans le plan $H' \cap P^3$ de P^3 et passent par le point fixe $\Delta' \cap P^3$ de ce plan. Donc il y a d possibilités pour le choix d'un point-double et il reste $n - 2$ autres possibilités pour le point simple. Dans ce cas le degré cherché est $d(n - 2)$.

On ne tient pas compte d'une multiplicité éventuelle, car cela ne change rien à l'énoncé du lemme.

- iii) Soit $O = \Delta'' \cap P^3$ et $P = \mathcal{H}_1 \cap P^3$ (où $\mathcal{H}_1$ est l'hyperplan qui définit le cycle H_1). Les axes des triplets de I doivent passer par O et les triplets avoir un point au moins sur P . Deux cas à distinguer :

- ou le point simple est sur $P \cap S'$ et le point-double a son support sur Γ . Il y a donc nd choix possibles puisque $\deg \Gamma = d$;
- ou le point-double a pour support l'un des d points de $P \cap \Gamma$ et il reste $n - 2$ autres possibilités pour le point simple. (En plus, dans ce cas la multiplicité est 2).

La somme est bien de toute façon de la forme $d(\beta n + \gamma)$.



Dans l'un comme l'autre cas de figure ci-dessus, les petits traits représentent les doublets *dans* $\mathbf{P}^4$, de support Γ .

iv) Soit $P = H'' \cap \mathbf{P}^3$ et $P_1 = \mathcal{H}_1 \cap \mathbf{P}^3$. Les triplets doivent donc être dans P et avoir au moins un point sur la droite $\Delta = P \cap P_1$. Il y a donc n possibilités pour le point simple, d'où dn possibilités pour le choix d'un tel triplet.

v) Les axes des triplets de I doivent couper la droite fixe $\Delta = \pi \cap \mathbf{P}^3$ et les triplets doivent avoir deux points sur $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Soit $P_i = \mathcal{H}_i \cap \mathbf{P}^3$. Comme les triplets de I ne sont pas formés de trois points distincts, le support $\{O\}$ du point-double doit être ou sur P_1 ou sur P_2 . Supposons qu'il soit sur P_1 ; comme le degré de Γ est d , cela donne d possibilités de choix pour O . Mais alors la droite Δ et le point O engendrent un plan P . La droite $P \cap P_2$ coupe S' en n points dans P parmi lesquels est choisi le troisième point du triplet; donc il y a dn solutions et par symétrie entre P_1 et P_2 , $2dn$ au total.

vi) Soit $P_i = \mathcal{H}_i \cap \mathbf{P}^3$. Les triplets de I doivent avoir un point sur chacun des trois plans P_1, P_2, P_3 ; mais comme ces triplets ne sont pas simples, la partie doublet est obligatoirement à support sur une des droites $P_i \cap P_j$. Or aucune de ces droites ne coupe Γ ; l'intersection est donc O .

Le lemme 5 est ainsi démontré.

d) *Conclusion*

Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$ à singularités ordinaires et $\Sigma/\mathbf{C}$ le schéma relatif associé défini en I.3.b. Posons $\bar{U} = \mathbf{C}$ et $U = \mathbf{C}^*$. Nous allons voir que les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites pour le schéma relatif $\Sigma/\mathbf{C}$.

Pour a), cela résulte de la proposition 4 ii). Pour b), cela résulte de la proposition 6 ii), chaque composante de $\text{Hilb}^3 \Sigma_0$ étant génériquement réduite. Enfin le schéma $\Sigma/\mathbf{C}^*$ est isomorphe au produit $S \times \mathbf{C}^*$ par construction même (remarque 3). Donc par la remarque 1, $\Sigma/\mathbf{C}^*$ est k -plat, puisque $S \subset \mathbf{P}^4$ n'a que des singularités ordinaires. L'hypothèse c) de la proposition 1 est donc satisfaite.

La proposition 1 donne alors l'équivalence rationnelle dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$:

$$[\text{Hilb}_c^3 S] \sim [\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0].$$

Or par la proposition 6 i), on a l'égalité des cycles:

$$[\text{Hilb}_c^3 \Sigma_0] = [\text{Hilb}_c^3 S'] + [\overline{S_{21}}] + [S_3].$$

D'où pour n'importe quel cycle Z de $A^3(Al^3 \mathbf{P}^4)$, l'égalité des 0-cycles:

$$Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S] = Z \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S'] + Z \cdot i^* [\overline{S_{21}}] + Z \cdot i^* [S_3].$$

Des lemmes 3, 4 et 5 résulte alors aussitôt la proposition 5 que l'on cherchait à prouver.

III) TRISÉCANTES DANS $\mathbf{P}^4$: LES CALCULS

Soit S une surface de $\mathbf{P}^4$ d'invariants n, d, t (notations du § II). On va donner deux formules trisécantes pour S , supposée à singularités ordinaires dans $\mathbf{P}^4$.

1°) TANGENTES À S RECOUPANT S ET UNE DROITE FIXÉE.

Nous cherchons le degré du 0-cycle

$$[\mathcal{D}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_2 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S]$$

où comme d'habitude, $i: Al^3 \mathbf{P}^4 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ est l'injection canonique. Ici, $\mathcal{D} \subset Al^3 \mathbf{P}^4$ est l'hypersurface des triplets alignés non simples et $\sigma_2 = (1, 4)$ est le cycle de $A^2(G(1, 4))$ des droites de $\mathbf{P}^4$ coupant une droite fixe Δ . D'après la proposition 5, ce nombre est de la forme

$$T(S) = a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma).$$

a) Avant de commencer le calcul des six coefficients, regardons le cas où S est singulière avec δ points-doubles impropres. Soit O l'un de ces points. Il engendre avec Δ un plan P recoupant S en $n - 2$ autres points et non pas $n - 3$ (voir IV.1.c.i). Or chacune des $n - 2$ droites joignant O à l'un de ces $n - 2$ points est une droite coupant S suivant un triplet non simple (car double en O). C'est une « fausse » tangente à S . Donc il faudra, pour avoir le nombre de « vraies » tangentes à S , retrancher de $T(S)$ ces $\delta(n - 2)$ fausses tangentes par les points-doubles de S . Mais il faut le faire bien sûr en comptant la multiplicité.

Un calcul montre alors (Annexe 8) que cette multiplicité est 2. C'est tout à fait analogue au fait que la classe d'une courbe plane avec δ points-doubles ordinaires est $n(n - 1) - 2\delta$ puisqu'on doit retrancher les droites, comptant deux fois, qui passent par les points-doubles.

b) Soit alors $\tilde{S}$ la réunion de S et d'un plan P générique de $\mathbf{P}^4$. Essayons d'évaluer $T(\tilde{S})$. D'après le lemme 9 (Annexe 1) $\text{Hilb}_c^3 \tilde{S}$ se décompose en quatre composantes (réduites)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Hilb}_c^3 S \\ \overline{\text{Hilb}^2 S_0 \times P_0} \\ \overline{S_0 \times \text{Hilb}^2 P_0} \\ \text{Hilb}_c^3 P \end{array} \right.$$

où $S_0 = S - P$ et $P_0 = P - S$; la barre est l'adhérence dans $\text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$.

On a donc, si $i: \text{Al}^3 \mathbf{P}^4 \hookrightarrow \text{Hilb}_c^3 \mathbf{P}^4$ est l'injection canonique,

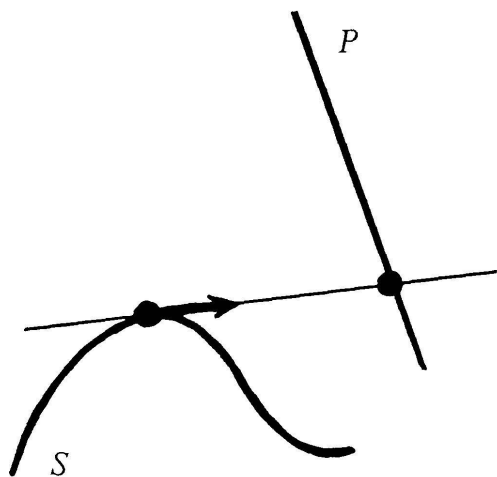
$$\begin{aligned} & i^* [\text{Hilb}_c^3 \tilde{S}] \\ &= i^* [\text{Hilb}_c^3 S] + i^* [\overline{\text{Hilb}^2 S_0 \times P_0}] + i^* [\overline{S_0 \times \text{Hilb}^2 P_0}] + i^* [\text{Hilb}_c^3 P]. \end{aligned}$$

Pour obtenir $T(\tilde{S})$, on intersecte avec $[\mathcal{D}]$. Axe* σ_2 dans $A^*(\text{Al}^3 \mathbf{P}^4)$. Le premier terme va donc donner par définition $T(S)$ et le dernier $T(P)$. Le troisième terme, lui, va donner 0 car une droite dans P ne recoupe pas une droite fixée générique.

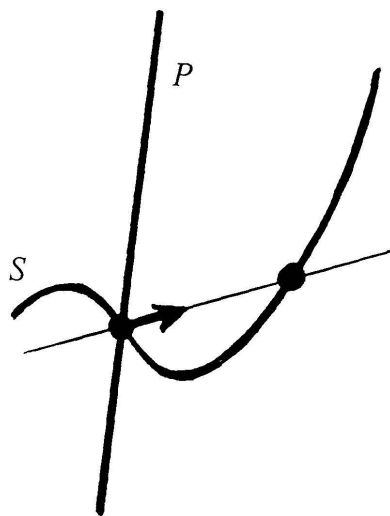
Reste à voir la contribution du deuxième terme. Rappelons qu'on cherche des triplets *non simples*. Deux cas sont à distinguer :

— ou le point-double est sur S et le point simple sur P ,

— ou deux points simples sont sur S et le point-double provient de la rencontre avec P en l'un des points-simples.



Premier cas



Deuxième cas

Dans le premier cas, le nombre cherché est $n(n-1)$. En effet, il s'agit du nombre de tangentes à S coupant un plan P fixé et une droite fixée. Par la formule de Pieri, on a dans $A^*(G(1, 4))$:

$$(1, 4) \cdot (2, 4) = (0, 4) + (1, 3).$$

Il s'agit donc du nombre de tangentes à S passant par un point fixe O plus le rang (μ_1) d'une section hyperplane. C'est donc $v + 2\delta$ d'une part (il faut bien compter, *et avec multiplicité 2*, les δ fausses tangentes à S passant par O et l'un des δ points-doubles impropres de S) et d'autre part $\mu_1 = n(n-1) - 2d$ ([34], p. 190) car une section hyperplane de S a degré n et d points-doubles apparents.

Soit au total $n(n-1)$ car $2d = v + 2\delta$ (cf. Annexe 6). La multiplicité est 1 car P est choisi générique.

Dans le deuxième cas, vu ce qu'on a dit au début de ce paragraphe, il s'agit de « fausses » tangentes à $\tilde{S}$ par l'un des n points d'intersection de P et S . Donc on doit les compter $2n(n+1-2)$ puisque $\tilde{S}$ est de degré $n+1$.

Au total, la contribution du deuxième terme dans $T(\tilde{S})$ est $3n(n-1)$. On a donc montré la relation

$$T(\tilde{S}) = T(S) + T(P) + 3n(n-1),$$

soit en utilisant le lemme 13 de l'Annexe 5:

$$\begin{aligned}
 a_1(n+1) + a_2 \binom{n+1}{2} + a_3 \binom{n+1}{3} + \alpha(t+d) + (d+n)(\beta(n+1) + \gamma) \\
 = a_1n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + a_1 + 3n(n-1).
 \end{aligned}$$

(Il vient $T(P) = a_1$ car alors $n = 1, d = t = 0$). Or le lemme 12 (Annexe 5) permet d'identifier les coefficients ce qui donne :

pour d : $\alpha + \beta = 0$,

pour n : $\begin{cases} -\gamma = a_2 - a_3 + 6 & (\text{on a fait } n = -1) \\ a_2 + 2\beta + \gamma = 0 & (\text{on a fait } n = 1). \end{cases}$

Il reste à trouver trois autres équations. On remarque tout d'abord que ni un plan, ni une quadrique de $\mathbf{P}^3$ plongée dans $\mathbf{P}^4$ n'ont de trisécante rencontrant une droite fixe. On a donc $T = 0$ pour ces deux surfaces, soit $a_1 = 2a_2 + a_3 = 0$. Ensuite, la surface $S(2, 2)$, intersection complète de deux hyperquadriques de $\mathbf{P}^4$, vérifie $T = 0$; car pour raison de degré, une trisécante est l'une des 16 droites qu'elle contient et aucune ne rencontre une droite fixe. Mais on connaît n, d, t (Annexe 6) d'où

$$4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + 2(4\beta + \gamma) = 0.$$

Ces six équations ensemble forment un système inversible dont la solution est :

$$\begin{cases} a_1 = 0 & a_2 = 0 & a_3 = -6 \\ \alpha = -6 & \beta = 6 & \gamma = -12. \end{cases}$$

On a donc démontré (vu a)) le

THÉORÈME 1. *Soit S une surface à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$, d'invariants n, d, t . Alors le degré du 0-cycle*

$$[\mathcal{D}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_2 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S]$$

(nombre de tangentes à S recoupant S et une droite fixe) est

$$6 \left(d(n-2) - \binom{n}{3} - t \right).$$

Et les δ points-doubles impropres éventuels de S contribuent de $2\delta(n-2)$ dans ce nombre.

2°) TANGENTES D'INFLEXION COUPANT UN PLAN FIXÉ

Nous cherchons cette fois le degré $T(S)$ du 0-cycle

$$[\mathcal{T}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_1 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S].$$

Cette fois, $\mathcal{T} \subset \mathbb{A}^3 \mathbf{P}^5$ est la sous-fibration en $\mathcal{T}_0 \subset \text{Hilb}^3 \mathbf{P}^1$ formée des triplets alignés de support un point. ($\mathcal{T}_0$ a la structure d'une cubique gauche dans $\text{Hilb}^3 \mathbf{P}^1 \simeq \mathbf{P}^3$). Le cycle σ_1 de $\mathbb{A}^1(G(1, 4))$, encore noté $(2, 4)$, est formé des droites coupant un plan π fixé.

Toujours d'après la proposition 5, le nombre $T(S)$ est de la forme

$$a_1 n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma).$$

a) Avant de chercher les six coefficients, regardons le cas où S est singulière avec δ points-doubles impropres.

Soit O l'un de ces points. Chacun des plans tangents P_1 (resp. P_2) à S en O coupe le plan π fixé en un point m_1 (resp. m_2). Les deux triplets alignés de support $\{O\}$ et d'axe $\overline{Om_1}$ (resp. $\overline{Om_2}$) sont dans S et interviennent donc dans $T(S)$. Cependant, ces droites sont de « fausses » tangentes d'inflexion. L'Annexe 8 b) montre qu'elles comptent avec multiplicité 3. On devra donc retrancher de $T(S)$ le nombre 6δ de façon à obtenir le nombre de « vraies » tangentes d'inflexion. Ceci est analogue au fait que pour une courbe plane ayant seulement δ points-doubles ordinaires, on doit retrancher 6δ à $3n(n-2)$ pour avoir le nombre de « vrais » points d'inflexion ([34], p. 78).

b) Soit, comme en 1), $\tilde{S}$ la réunion de S et d'un plan P . On obtient, avec les mêmes notations :

$$\begin{aligned} & i^* [\text{Hilb}_c^3 \tilde{S}] \\ &= i^* [\text{Hilb}_c^3 S] + i^* [\overline{\text{Hilb}^2 S_0 \times P_0}] + i^* [\overline{S_0 \times \text{Hilb}^2 P_0}] + i^* [\text{Hilb}_c^3 P]. \end{aligned}$$

Pour obtenir $T(\tilde{S})$, on intersecte avec $[\mathcal{T}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_1$; le premier terme va donc donner par définition $T(S)$ et le dernier : $T(P) = a_1$. Reste à voir la contribution des deuxième et troisième termes.

D'après a), elle est de $3n$ pour chacun d'eux. En effet, pour chaque point d'intersection O de S et P , il y a deux triplets alignés de support $\{O\}$ coupant un plan fixe π : l'un dans $T_0 S$ et l'autre dans P ; et chacun compte, vu a), avec la multiplicité 3. On a donc montré la relation

$$T(\tilde{S}) = T(S) + a_1 + 6n,$$

soit comme précédemment :

$$\begin{aligned} a_1(n+1) + a_2 \binom{n+1}{2} + a_3 \binom{n+1}{3} + \alpha(t+d) + (d+n)(\beta(n+1) + \gamma) \\ = a_1n + a_2 \binom{n}{2} + a_3 \binom{n}{3} + \alpha t + d(\beta n + \gamma) + a_1 + 6n. \end{aligned}$$

Grâce à l'Annexe 5, on peut identifier comme précédemment en d et n , d'où

$$\alpha + \beta = 0, \quad -\gamma = a_2 - a_3 - 6 \quad \text{et} \quad a_2 + 2\beta + \gamma = 6$$

comme équations.

Il reste à en trouver trois autres. La surface $S(2, 2)$ contient 16 droites dont aucune ne coupe un plan fixe; donc $T(S(2, 2)) = 0$. D'où comme plus haut: $4a_1 + 6a_2 + 4a_3 + 2(4\beta + \gamma) = 0$. Enfin, par un calcul énumératif simple (Annexe 9), on a $T(S(2, 3)) = 60$ et $T(S(2, 4)) = 192$ d'où deux dernières équations :

$$\begin{cases} 6a_1 + 15a_2 + 20a_3 + 6(6\beta + \gamma) = 60 & \text{car on connaît } (n, d, t) \\ 8a_1 + 28a_2 + 56a_3 + 12(8\beta + \gamma) = 192 & \text{pour ces surfaces (Annexe 6).} \end{cases}$$

Ces six équations ensemble forment un système inversible dont la solution est

$$\begin{cases} a_1 = -3 & a_2 = -6 & a_3 = 12 \\ \alpha = 6 & \beta = -6 & \gamma = 24. \end{cases}$$

On a donc démontré, vu a), le

THÉORÈME 2. *Soit S une surface à singularités ordinaires de $\mathbf{P}^4$, d'invariants n, d, t . Alors le degré du 0-cycle $[\mathcal{T}] \cdot \text{Axe}^* \sigma_1 \cdot i^* [\text{Hilb}_c^3 S]$ (nombre de tangentes d'inflexion à S coupant un plan fixe) est*

$$n(n-4)(2n-1) + 6(t-d(n-4)).$$

Et les δ points-doubles impropres éventuels de S contribuent de 6δ dans ce nombre.