# tractrice

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **34 (1988)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

donc

$$(9) \qquad p = \sinh\left(\frac{x - x_0}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad y = K + c\cosh\left(\frac{x - x_0}{c}\right).$$

## LE DEUXIÈME PROBLÈME DE DEBEAUNE

> Cette piéce a été faite en commun par Mr. le Marquis de l'Hospital & par Mr. Bernoulli. C'est pourquoi l'un & l'autre a cru être en droit de se l'attribuer...
>
> (Cramer 1742)

Johann passe l'année 1692 à Paris où il fait la connaissance de Guillaume François Marquis de l'Hospital (1661-1704). Ce dernier lui verse de fortes sommes d'argent en échange de leçons de mathématiques. Pour impressionner son élève, Johann commence aussitôt à résoudre le deuxième problème de Debeaune. Il trouve ([6])

$$(10) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{y - x},$$

pose $z = y - x$ et obtient

$$(11) \qquad \frac{zdz}{a - z} = dx\,.$$

La solution est donc déterminée par la surface de l'hyperbole $\dfrac{z}{a - z}$. Donc, si on veut que $z(0) = 0$, on trouve

$$(12) \qquad x = -z + a\log\frac{a}{a - z}.$$

## LA TRACTRICE

> Claudius Perraltus Medicus Parisinus insignis, tum & Mechanicis atque Architectonicis studiis egregius, & Vitruvii editione notus, idemque in Regia scientiarum Societate Gallica, dum viveret, non postremus, mihi & aliis ante me multis proposuit hoc problema, cujus nondum sibi occurrisse solutionem ingenue fatebatur...
>
> (Leibniz, 1693)

Lors du séjour de Leibniz à Paris (1672-1676), le célèbre anatomiste et architecte Claude Perrault lui pose le problème suivant: pour quelle courbe en chaque point $P$ la tangente est de longueur constante $a$ entre $P$ et l'axe $x$ (fig. 10)? Pour illustrer cette question, il tire de son gousset une «horologio portabili suae thecae argenteae» et la fait glisser sur la table. Aucun autre mathématicien de sa connaissance n'avait été capable d'en trouver la formule.

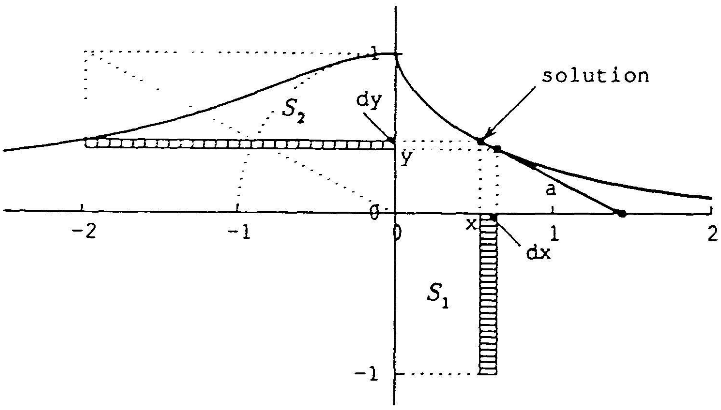


FIGURE 10.
La tractrice.

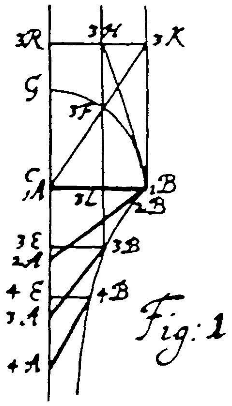


FIGURE 11.
La tractrice (dessin de Leibniz).

Leibniz publie sa solution en 1693 dans les A.E. [19], en affirmant qu'il la connaît depuis longtemps: Puisque

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}, \quad \text{i.e.} \quad -\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,dy = dx \tag{13}$$

on trouve («ergo & horum...») la solution par quadratures de la courbe $\sqrt{a^2 - y^2}/y$ (fig. 10). En formules (voir Exercice 4)

$$x = \int_y^a \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}\,dy = -\sqrt{a^2 - y^2} - a\log\frac{a - \sqrt{a^2 - y^2}}{y}. \tag{14}$$

## L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE «DE BERNOULLI»

En généralisant le problème de Debeaune, Jacob tombe sur l'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} = p(x) \cdot y + q(x)y^n \tag{15}$$

et «sue sang et eau» pour la résoudre. Il défie son frère et lance officiellement ce problème dans les A.E. de 1695 ([2]). «Par malheur», Johann a aussitôt