Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ONT 350 ANS
Kapitel: Problèmes isopérimétriques, suite
Autor: Wanner, G.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56604

il introduit l'idée du «multiplicateur de Lagrange» (voir [16], première partie, Section IV, § 1) en remplaçant (22) par

$$\int_a^b \mathscr{L}(\lambda, x, y, y')dx = \min! \text{ (vel max!)} \tag{23}$$

où $\mathscr{L}$ est «la fonction de Lagrange»

$$\mathscr{L}(\lambda, x, y, y') = F(x, y, y') - \lambda G(x, y, y') .$$

Problèmes isopérimétriques, suite

Avec ces formules, introduites dans (21), le problème isopérimétrique de Jacob Bernoulli devient

$$y' = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{(K+y^m)^2} - 1} . \tag{24}$$

La solution est donc décrite par quadratures

$$\int \frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = x + C . \tag{25}$$

Les constantes C, K et λ sont à ajuster aux conditions aux bords et à la longueur L. Ce n'est que pour $m = 1$ que cette intégrale est résoluble avec efforts raisonnables (voir Euler [11], Caput V, Exemplum II; «quae est aequatio generalis pro Circulo»).

Pour $m > 1$ il s'agit d'intégrales «elliptiques» ou «hyperelliptiques» et on a besoin de méthodes numériques. Par exemple, si on pose $A = 0$, $B = 1$ et $L = 4$, les constantes K et λ dans (25) doivent satisfaire (puisque la courbe est symétrique il suffit de ne considérer que sa moitié ascendante)

$$\int_0^{y_{max}} \frac{(K+y^m)dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = 0.5 , \quad \text{et} \quad \int_0^{y_{max}} \frac{\sqrt{\lambda}dy}{\sqrt{\lambda - (K+y^m)^2}} = 2 . \tag{26}$$

où

$$y_{max} = (\sqrt{\lambda} - K)^{1/m}$$

est la valeur de y pour laquelle le dénominateur devient zéro. Un processus itératif (méthode de Newton) combiné avec le calcul numérique des intégrales (méthode de Gauss avec traitement spécial de la singularité en y_{max}) donne alors les valeurs suivantes:

m	K	λ
1	−0.634994	0.653218
2	−0.632487	3.825194
3	−0.607747	17.505763
4	−0.442476	73.491858
5	0.105432	296.416889

Les solutions correspondantes de l'équation (24) sont représentées dans la figure 15.

Johann obtient une solution particulière

$$\int \frac{y^m dy}{\sqrt{a^{2m} - y^{2m}}} = x + C ,$$

laquelle s'avère correcte (cf. (25)). Toutefois, sa solution générale est fausse, comme le constate Jacob avec satisfaction («...ou du moins nous dire, s'il n'y a point de faute d'impression dans son égalité $dv = ddy : (dt^2 - dy^2)$. & ... si elle est fausse, comme je le soutiens, à moins qu'il ne veuille se désister de ses prétentions»).

Epilogue

Les lecteurs que plus de détails intéressent sont invités à consulter le petit livre de J.E. Hofmann [14], extrêmement bien documenté. Les travaux des Frères Bernoulli, d'Euler et de Lagrange sont accessibles dans leurs «Opera Omnia» et «Œuvres». Une description de la suite de la théorie (Cauchy, Peano, Poincaré, Gronwall) et des méthodes numériques (Adams, Runge, Kutta) est donnée dans notre monographie [13] (cf. Sections I.4-I.16, II.1 et III.1 en particulier).

Remerciement. Je tiens à remercier M. P. de la Harpe pour son intérêt et pour ses observations pertinentes.