

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** EULER'S FAMOUS PRIME GENERATING POLYNOMIAL AND THE CLASS NUMBER OF IMAGINARY QUADRATIC FIELDS  
**Kapitel:** C) Discriminant  
**Autor:** Ribenboim, Paulo  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56587>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

If  $d \equiv 1 \pmod{4}$  then  $\left\{1, \frac{1 + \sqrt{d}}{2}\right\}$  is an integral basis of  $A$ .

### C) DISCRIMINANT

Let  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  be an integral basis. Then

$$D = D_K = \det \begin{pmatrix} \text{Tr}(\alpha_1^2) & \text{Tr}(\alpha_1\alpha_2) \\ \text{Tr}(\alpha_1\alpha_2) & \text{Tr}(\alpha_2^2) \end{pmatrix}$$

is independent of the choice of the integral basis. It is called the discriminant of  $K$ . It is a non-zero integer.

If  $d \equiv 2$  or  $3 \pmod{4}$  then

$$D = \det \begin{pmatrix} \text{Tr}(1) & \text{Tr}(\sqrt{d}) \\ \text{Tr}(\sqrt{d}) & \text{Tr}(d) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2d \end{pmatrix} \quad \text{so } D = 4d.$$

If  $d \equiv 1 \pmod{4}$  then

$$D = \det \begin{pmatrix} \text{Tr}(1) & \text{Tr}\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) \\ \text{Tr}\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) & \text{Tr}\left(\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)^2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1+d}{2} \end{pmatrix} \quad \text{so } D = d.$$

Every discriminant is  $D \equiv 0$  or  $1 \pmod{4}$ .

In terms of the discriminant,

$$A = \left\{ \frac{a + b\sqrt{D}}{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}, \quad a^2 \equiv Db^2 \pmod{4} \right\}.$$

### D) DECOMPOSITION OF PRIMES

Let  $K = \mathbf{Q}(\sqrt{d})$ , where  $d$  is a square-free integer, let  $A$  be the ring of integers of  $K$ .

The ideal  $P \neq 0$  of  $A$  is a prime ideal if the residue ring  $A/P$  has no zero-divisors.

If  $P$  is a prime ideal there exists a unique prime number  $p$  such that  $P \cap \mathbf{Z} = \mathbf{Z}p$ , or equivalently,  $P \supseteq Ap$ .