

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EULER'S FAMOUS PRIME GENERATING POLYNOMIAL AND THE CLASS NUMBER OF IMAGINARY QUADRATIC FIELDS

Bibliographie

Autor: Ribenboim, Paulo
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56587>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$= a^2 + b^2p$, thus $1 > a^2 + (b^2 - 1)p$ and necessarily $a^2 = 0, b^2 = 1$, hence $4l = p$, which is absurd.

Now assume that there exists $m, 0 \leq m \leq q - 2$, such that $f_q(m) = m^2 + m + q$ is not a prime. Then there exists a prime l such that $l^2 \leq m^2 + m + q$ and $m^2 + m + q = al$, with $a \geq 1$. Since $m^2 + m + q$ is odd then $l \neq 2$. Also $4l^2 \leq (2m+1)^2 + p < \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + p = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2$, hence $l < \frac{p+1}{4} = q$. As it was shown, $\left(\frac{l}{p}\right) = -1$. However,

$$4al = (2m+1)^2 + 4q - 1 = (2m+1)^2 + p,$$

hence $-p$ is a square modulo l , so by Gauss' reciprocity law,

$$1 = \left(\frac{-p}{l}\right) = \left(\frac{-1}{l}\right) \left(\frac{p}{l}\right) = (-1)^{\frac{l-1}{2}} \left(\frac{l}{p}\right) (-1)^{\frac{l-1}{2} \times \frac{p-1}{2}} = \left(\frac{l}{p}\right),$$

and this is absurd. □

BIBLIOGRAPHY

- [1] AYOUB, R. and S. CHOWLA. On Euler's polynomial. *J. Nb. Th.* 13 (1981), 443-445.
- [2] BOREVICH, Z. I. and I. R. SHAFAREVICH. *Number Theory*. Academic Press, New York, 1966.
- [3] COHN, H. *Advanced Number Theory*. Dover Publ., New York, 1962.
- [4] GOLDFELD, D. Gauss' class number problem for imaginary quadratic fields. *Bull. Amer. Math. Soc.* 13 (1985), 23-37.
- [5] LEHMER, D. H. On the function $x^2 + x + A$. *Sphinx* 6 (1936), 212-214.
- [6] PRITCHARD, P. A. Long arithmetic progressions of primes: some old, some new. *Math. of Comp.* 45 (1985), 263-267.
- [7] RABINOVITCH, G. Eindeutigkeit der Zerlegung in Primzahlfaktoren in quadratischen Zahlkörper. *Intern. Congress of Math.*, Cambridge, 1912, vol. 1, 418-421.
- [8] RIBENBOIM, P. *Algebraic Numbers*. Wiley-Interscience, New York, 1972.
- [9] ——— *The Book of Prime Number Records*. Springer Verlag, New York, 1988.
- [10] SCHINZEL, A. and W. SIERPIŃSKI. Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers. Remarques. *Acta Arithm.* 4 (1958), 185-208 and 5 (1959), p. 259.
- [11] SCHINZEL, A. Remarks on the paper «Sur certaines hypothèses concernant les nombres premiers». *Acta Arithm.* 7 (1961), 1-8.
- [12] SZEKERES, G. On the number of divisors of $x^2 + x + A$. *J. Nb. Th.* 6 (1984), 434-442.

(Reçu le 4 avril 1987)

Paulo Ribenboim

Queen's University
Kingston, Ontario
Canada K7L 3N6