

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES
Kapitel: §5. Lien entre $h(-d)$ et $h(-df^2)$
Autor: Oesterlé, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56588>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$2C$, $3C$, $4C$, $5C$ sont les classes des formes réduites dont les coefficients sont $(9, 7, 11)$, $(9, -7, 11)$, $(3, -1, 29)$ et $(1, 1, 87)$ respectivement.

§ 5. LIEN ENTRE $h(-d)$ ET $h(-df^2)$ ¹⁾

Soient $-d$ un discriminant fondamental (cf. § 3), et f un entier ≥ 1 . Les nombres de classes primitives $h(-df^2)$ et $h(-d)$ sont liés par une formule simple. Pour l'établir, nous allons définir un homomorphisme de groupes

$$v: Cl(-df^2) \rightarrow Cl(-d).$$

C'est dans le langage des idéaux fractionnaires que cet homomorphisme se définit le plus aisément: à la classe d'un $\mathcal{O}(-df^2)$ -idéal fractionnaire L , v fait correspondre la classe de $\mathcal{O}(-d)L$, qui est un $\mathcal{O}(-d)$ -idéal fractionnaire.

Pour tout $x \in \mathcal{O}(-d)$, inversible modulo $f\mathcal{O}(-d)$, le réseau $x\mathcal{O}(-d) \cap \mathcal{O}(-df^2)$ est un $\mathcal{O}(-df^2)$ -idéal fractionnaire. L'application qui à x associe la classe de cet idéal définit par passage au quotient un homomorphisme de groupes

$$u: (\mathcal{O}(-d)/f\mathcal{O}(-d))^\times \rightarrow Cl(-df^2).$$

On démontre (en utilisant le fait que « la donnée d'un réseau équivaut à celle de ses localisés ») que la suite

$$(\mathcal{O}(-d)/f\mathcal{O}(-d))^\times \xrightarrow{u} Cl(-df^2) \xrightarrow{v} Cl(-d) \rightarrow 0$$

est exacte, et que le noyau de u est engendré par les classes des entiers relatifs inversibles modulo f et des unités de $\mathcal{O}(-d)$.

Un argument de comptage permet d'en déduire la formule

$$h(-df^2) = h(-d)w^{-1}f \prod_{\substack{p|f \\ p \text{ premier}}} (1 - p^{-1}\chi(p))$$

où l'on a posé

$$w = \begin{array}{lll} 3 & \text{si} & d = 3 \quad \text{et} \quad f \geq 2 \\ 2 & \text{si} & d = 4 \quad \text{et} \quad f \geq 2 \\ 1 & \text{sinon,} & \end{array}$$

et où χ désigne le caractère de Dirichlet quadratique $n \mapsto \left(\frac{-d}{n}\right)$ associé

¹⁾ C.-F. GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 253 à 256.

au corps $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$. On a en particulier si $d > 4$

$$(10) \quad h(-df^2) \geq h(-d)\varphi(f)$$

où φ est la fonction d'Euler.

II. LE PROBLÈME DU NOMBRE DE CLASSES

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement du nombre de classes lorsque le discriminant tend vers $-\infty$. Compte tenu des formules (8) de I. § 3 et (10) de I. § 5, il est légitime de restreindre notre étude aux discriminants fondamentaux (cf. I. § 3). Dans toute la suite, $-d$ sera un tel discriminant: on aura donc $\tilde{h}(-d) = h(-d)$.

Dans les derniers numéros de son exposé de la classification des formes quadratiques, Gauss émet quelques observations concernant les tables de nombres de classes (il avait constitué lui-même de telles tables, en particulier pour $d \leq 3000$); il qualifie de surprenante l'observation suivante¹⁾: pour chaque entier $h \geq 1$, il semble n'y avoir qu'un nombre fini de d tels que $h(-d) = h$. Ainsi, pour $h = 1$, ne trouve-t-il dans sa table que les neuf discriminants fondamentaux

$$-3, -4, -7, -8, -11, -19, -43, -67, -163$$

(et en outre les quatre discriminants non fondamentaux $-12, -16, -27, -28$).

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, Heilbronn²⁾ en 1934 a démontré que, conformément à l'observation de Gauss, on a bien

$$(11) \quad \lim_{d \rightarrow \infty} h(-d) = +\infty.$$

Des tables étendues de nombres de classes ont été construites par ordinateur. Buell³⁾ par exemple a publié les valeurs de $h(-d)$ pour $d \leq 4\,000\,000$. Parmi les discriminants fondamentaux satisfaisant à cette inégalité, le nombre de ceux pour lesquels $h(-d)$ est égal à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 est respectivement 9, 18, 16, 54, 25, 51, 31, 131, 34, 87, et

¹⁾ C.-F. GAUSS, *Disquisitiones Arithmeticae*, n° 303.

²⁾ H. HEILBRONN, *On the class numbers in imaginary quadratic fields*, Quarterly J. of Math. (Oxford), 5 (1934), 150-160.

³⁾ D. A. BUELL, *Small class numbers and extreme values of L-functions of quadratic fields*, Math. of Comp. 31 (1977), 786-796.