Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES

Kapitel: §8. Le théorème de Gross et Zagier

Autor: Oesterlé, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56588

on obtient par exemple [1]) pour $h(-d)$ *impair* une inégalité de la forme

$$h(-d) \geqslant c_E \log d \tag{34}$$

où c_E est une constante dépendant de la courbe elliptique E choisie, et susceptible d'être calculée. (Plus généralement, si $h(-d)$ est de la forme $2^t h'$ avec h' impair, on a une inégalité analogue à (34) à condition de remplacer c_E par une nouvelle constante $c_E(t)$ qui dépend de t, par exemple $c_E(t) = c_E e^{-3\sqrt{t}}$, et de supposer d premier à N_E; cette dernière condition peut même être omise si l'on choisit E convenablement comme l'ont remarqué Gross et Zagier.)

Comment trouver E *remplissant les deux conditions énoncées ci-dessus?* On commence par choisir une courbe elliptique E telle que le groupe $E(\mathbf{Q})$ ait un rang impair $r \geqslant 3$ (il y en a une infinité et on peut en expliciter à volonté). On vérifie qu'elle est de Weil (soit parce qu'elle est à multiplications complexes, soit par un calcul sur ordinateur) et que le signe ε_E de l'équation fonctionnelle de L_E est -1 (par le calcul). La fonction L_E a alors un zéro d'ordre ρ *impair* en 1, et si l'on croit en la conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer, ρ doit être égal à r, donc $\geqslant 3$. Malheureusement, cette conjecture n'est pas démontrée. Peut-on s'en passer et dans le cas particulier choisi, prouver directement l'inégalité $\rho \geqslant 3$? Puisque ρ est impair, cela revient à montrer que $L'_E(1) = 0$. Il est possible d'obtenir par calcul sur ordinateur des valeurs approchées de $L'_E(1)$, mais a priori même si celles-ci sont très petites on ne peut conclure à la nullité de $L'_E(1)$.

Il a fallu attendre 1983 et les travaux de Gross et Zagier pour arriver enfin à surmonter cette difficulté et à appliquer le théorème de Goldfeld.

§ 8. Le théorème de Gross et Zagier

Soit E une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ et soit $P \in E(\mathbf{Q})$ un point rationnel de E. Ecrivons l'abscisse $x(n(P))$ du point $P + \dots + P$ (n termes, la somme étant calculée dans le groupe $E(\mathbf{Q})$) sous forme d'une fraction irréductible a_n/b_n. On montre que l'expression $\frac{1}{2} n^{-2} \log (\sup (|a_n|, |b_n|))$ a une limite $\hat{h}(P)$ lorsque P tend vers $+\infty$, appelée *hauteur de Néron-Tate de P.*

[1]) Cette inégalité, un peu meilleure que celle de Goldfeld, est prouvée par la même méthode dans mon exposé sur la question au Séminaire Bourbaki (Juin 1984, exposé 631).

L'application $P \mapsto \widehat{h}(P)$ de $E(\mathbf{Q})$ dans $\mathbf{R}$ est quadratique et positive, et l'on a $\widehat{h}(P) = 0$ si et seulement si P est un point *de torsion* du groupe $E(\mathbf{Q})$.

Gross et Zagier ont obtenu en 1983 un très beau théorème [1]) qui donne *une expression de la dérivée en* 1 *de certaines fonctions* L associées à des formes modulaires. Exposons simplement le cas particulier de ce théorème qui nous intéresse pour le problème du nombre de classes: considérons comme au § 7 une courbe elliptique E de Weil, telle que le signe ε_E de l'équation fonctionnelle L_E soit -1, et notons f_E la forme modulaire associée (§ 6); il existe alors une constante réelle calculable non nulle c_E telle que:

Pour tout caractère de Dirichlet quadratique impair χ *de conducteur* $d \geqslant 7$ *tel que* $\chi(N_E) = 1$, *il existe un point* $P \in E(\mathbf{Q})$ *tel que*

$$L_E'(1)L_E(\chi, 1) = c_E\widehat{h}(P) .$$

Ce théorème peut être utilisé pour résoudre le problème laissé en suspens au paragraphe précédent, à savoir vérifier si $L_E'(1) = 0$: pour cela, on choisit un caractère de Dirichlet χ comme ci-dessus pour lequel $L_E(\chi, 1) \neq 0$ (ceci est toujours possible, d'après un théorème de Waldspurger, et on trouve facilement un tel χ lorsque E est choisie). Comme on dispose de majorations de $L_E(\chi, 1)$, de la valeur approchée de c_E et de minorations des $\widehat{h}(P)$ non nuls lorsque P décrit $E(\mathbf{Q})$, il suffit alors pour conclure à la nullité de $L_E'(1)$ de montrer que $L_E'(1)$ est assez petit, ce qu'un calcul sur ordinateur permet de faire.

§ 9. Conclusion

Gross et Zagier ont vérifié que la courbe elliptique d'équation (minimale):

$$y^2 + y = x^3 - x^2 - 450\,823x + 112\,971\,139$$

satisfait aux exigences du § 6. En calculant la constante c_E correspondante (cf. pour cela mon exposé au Séminaire Bourbaki), on obtient

$$\begin{aligned} h(-d) = 3 &\Rightarrow \log d \leqslant 21\,000 \\ h(-d) = 4 &\Rightarrow \log d \leqslant 336\,000 \\ h(-d) = 5 &\Rightarrow \log d \leqslant 35\,000 \\ h(-d) = 6 &\Rightarrow \log d \leqslant 168\,000 \end{aligned}$$

etc.

[1]) B. H. Gross et D. B. Zagier, *Heegner points and derivatives of L-series*, Inv. Math. 84 (1986), 225-320.