

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 34 (1988)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME DE GAUSS SUR LE NOMBRE DE CLASSES  
**Kapitel:** §9. Conclusion  
**Autor:** Oesterlé, J.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-56588>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

L'application  $P \mapsto \widehat{h}(P)$  de  $E(\mathbf{Q})$  dans  $\mathbf{R}$  est quadratique et positive, et l'on a  $\widehat{h}(P) = 0$  si et seulement si  $P$  est un point *de torsion* du groupe  $E(\mathbf{Q})$ .

Gross et Zagier ont obtenu en 1983 un très beau théorème <sup>1)</sup> qui donne une expression de la dérivée en 1 de certaines fonctions  $L$  associées à des formes modulaires. Exposons simplement le cas particulier de ce théorème qui nous intéresse pour le problème du nombre de classes: considérons comme au § 7 une courbe elliptique  $E$  de Weil, telle que le signe  $\varepsilon_E$  de l'équation fonctionnelle  $L_E$  soit  $-1$ , et notons  $f_E$  la forme modulaire associée (§ 6); il existe alors une constante réelle calculable non nulle  $c_E$  telle que:

Pour tout caractère de Dirichlet quadratique impair  $\chi$  de conducteur  $d \geq 7$  tel que  $\chi(N_E) = 1$ , il existe un point  $P \in E(\mathbf{Q})$  tel que

$$L'_E(1)L_E(\chi, 1) = c_E \widehat{h}(P).$$

Ce théorème peut être utilisé pour résoudre le problème laissé en suspens au paragraphe précédent, à savoir vérifier si  $L'_E(1) = 0$ : pour cela, on choisit un caractère de Dirichlet  $\chi$  comme ci-dessus pour lequel  $L_E(\chi, 1) \neq 0$  (ceci est toujours possible, d'après un théorème de Waldspurger, et on trouve facilement un tel  $\chi$  lorsque  $E$  est choisie). Comme on dispose de majorations de  $L_E(\chi, 1)$ , de la valeur approchée de  $c_E$  et de minoration des  $\widehat{h}(P)$  non nuls lorsque  $P$  décrit  $E(\mathbf{Q})$ , il suffit alors pour conclure à la nullité de  $L'_E(1)$  de montrer que  $L'_E(1)$  est assez petit, ce qu'un calcul sur ordinateur permet de faire.

## § 9. CONCLUSION

Gross et Zagier ont vérifié que la courbe elliptique d'équation (minimale):

$$y^2 + y = x^3 - x^2 - 450\,823x + 112\,971\,139$$

satisfait aux exigences du § 6. En calculant la constante  $c_E$  correspondante (cf. pour cela mon exposé au Séminaire Bourbaki), on obtient

$$h(-d) = 3 \Rightarrow \log d \leq 21\,000$$

$$h(-d) = 4 \Rightarrow \log d \leq 336\,000$$

$$h(-d) = 5 \Rightarrow \log d \leq 35\,000$$

$$h(-d) = 6 \Rightarrow \log d \leq 168\,000$$

etc.

<sup>1)</sup> B. H. GROSS et D. B. ZAGIER, *Heegner points and derivatives of L-series*, Inv. Math. 84 (1986), 225-320.

D'autres courbes elliptiques de Weil  $E$  telles que  $E(\mathbf{Q})$  soit de rang 3, trouvées par Mestre,

$$\begin{aligned} y^2 + y &= x^3 - 7x + 6 & (N_E = 5\,077) \\ y^2 + y &= x^3 - x + 6 & (N_E = 16\,811) \\ y^2 + y &= x^3 - 19x + 30 & (N_E = 43\,669), \end{aligned}$$

permettent d'obtenir de meilleures majorations :

$$\begin{aligned} h(-d) = 3 &\Rightarrow \log d \leq 165 \\ h(-d) = 4 &\Rightarrow \log d \leq 2\,640 \\ h(-d) = 5 &\Rightarrow \log d \leq 275 \\ h(-d) = 6 &\Rightarrow \log d \leq 1\,320 \end{aligned}$$

etc.

Pour achever complètement de résoudre le problème du nombre de classes, il reste en fait à vérifier qu'en-dessous des bornes précédentes les seuls  $d$  pour lesquels  $h(-d)$  vaut 3, 4, 5, 6, etc. sont ceux qui figurent dans la table de Buell. Il devrait être possible de le faire en reprenant les calculs de Stark et Montgomery-Weinberger évoqués au § 5. Pour l'instant, cela n'a été fait que pour  $h = 3$  (par Montgomery et Weinberger), et pour  $h = 4$  (par Arno).

*(Reçu le 30 mars 1987)*

J. Oesterlé

Université Paris VI  
UER Mathématiques  
4, place Jussieu  
75230 Paris Cedex 05

**vide-leer-empty**