Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 34 (1988)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES

Kapitel: 1. Rappels sur les extensions

Autor: Grivel, Pierre-Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-56590

L'Enseignement Mathématique, t. 34 (1988), p. 83-105

EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES

par Pierre-Paul GRIVEL

INTRODUCTION

Soit M et N deux modules à gauche sur un anneau R. Il est bien connu que le groupe $\mathrm{Ext}_R^n(N; M)$ classe, à équivalence près, les n-extensions de M par N.

D'autre part soit G un groupe et A un groupe abélien sur lequel G agit à gauche. On définit le n-ième groupe de cohomologie de G à coefficients dans A comme étant le groupe $H^n(G; A) = \mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^n(\mathbf{Z}; A)$ où $\mathbf{Z}$ est considéré avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial; autrement dit on définit les groupes $H^*(G; A)$ comme étant les dérivés du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}G}(\mathbf{Z}; A) = A^G$.

Pour calculer ces groupes on utilise en général un complexe standard, à l'aide duquel on obtient une interprétation des premiers groupes de cohomologie.

Il paraissait intéressant d'obtenir directement l'interprétation de $H^1(G; A)$ et $H^2(G; A)$ à partir de l'interprétation de $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A)$ et $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}G}^2(\mathbf{Z}; A)$, sans avoir recours au complexe standard.

1. RAPPELS SUR LES EXTENSIONS

1.1. Soit R un anneau. Soit M et N deux R-modules à gauche. Une n-extension de M par N est une suite exacte de R-modules

$$\xi : 0 \to M \xrightarrow{\alpha} E_1 \xrightarrow{\alpha_1} E_2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} E_n \xrightarrow{\alpha_n} N \to 0 .$$

Deux n-extensions ξ et ξ' de M par N sont élémentairement équivalentes s'il existe n morphismes de R-modules $\gamma_i : E_i \to E_i'$ tels que $\gamma_1 \alpha = \alpha'$, $\alpha_i' \gamma_i = \gamma_{i+1} \alpha_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et $\alpha_n' \gamma_n = \alpha_n$, ou n morphismes de R-modules $\gamma_i' : E_i' \to E_i$ tels que $\gamma_1' \alpha' = \alpha$, $\alpha_i \gamma_i' = \gamma_{i+1}' \alpha_i'$ pour $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et $\alpha_n \gamma_n' = \alpha_n'$.

Deux n-extensions ξ et ξ' de M par N sont alors équivalentes s'il existe une suite d'équivalences élémentaires reliant ξ à ξ'.

On remarquera que dans le cas $n = 1$ l'équivalence élémentaire est déjà une relation d'équivalence car le morphisme γ est alors un isomorphisme.

On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension ξ.

1.2. Soit ξ une n-extension de M par N. Soit $u: M \to M'$ et $v: N' \to N$ deux morphismes de R-modules.

Par produit cofibré on définit l'extension $u\xi$ de M' par N et par produit fibré on définit l'extension ξv de M par N'.

1.3. Soit ξ et ξ' deux n-extensions de M par N. Notons $\nabla: M \oplus M \to M$ l'application codiagonale définie par $\nabla(m_1\,; m_2) = m_1 + m_2$ et $\Delta: M \to M \oplus M$ l'application diagonale définie par $\Delta(m) = (m\,; m)$. La somme de Baer de $[\xi]$ et $[\xi']$ est définie en posant $[\xi] + [\xi'] = [\nabla(\xi \oplus \xi')\Delta]$.

Muni de cette opération l'ensemble des classes d'équivalence des n-extensions de M par N est un groupe abélien.

1.4. Il est bien connu que les classes d'équivalence des n-extensions de M par N sont classées par le n-ième foncteur dérivé $\mathrm{Ext}_R^n(N\,; M)$ du foncteur $\mathrm{Hom}_R(N\,; M)$.

1.5. Considérons maintenant un groupe G et un groupe abélien A.

Une extension de A par G est une suite exacte de groupes

$$\xi: 0 \to A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} G \to 1\,.$$

Si ξ et ξ' sont deux extensions de A par G alors ξ est équivalente à ξ' s'il existe un morphisme de groupe $\gamma: E \to E'$ tel que $\gamma\lambda = \lambda'$ et $\mu'\gamma = \mu$. On notera $[\xi]$ la classe d'équivalence de l'extension ξ.

1.6. Si ξ est une extension de A par G on définit un morphisme de groupes $\theta: G \to \mathrm{Aut}\,(A)$ en posant, pour tout $g \in G$ et $a \in A$,

$$\lambda\theta(g)\,(a) = s(g)\lambda(a)s(g)^{-1}$$

où $s: G \to E$ est une section ensembliste de μ. Ainsi le groupe abélien A est muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche.

1.7. Si le groupe A est déjà muni d'une structure de $\mathbf{Z}G$-module à gauche on désignera par $e(G\,; A)$ l'ensemble des classes d'équivalence des extensions de A par G telles que l'action de G sur A induite par l'extension soit égale à l'action donnée de G sur A.

L'ensemble $e(G;A)$ n'est pas vide car il contient la classe d'équivalence de l'extension

$$0 \to A \xrightarrow{\iota} A \times G \xrightarrow{\pi} G \to 1$$

donnée par le produit semi-direct.

1.8. Muni de la somme de Baer l'ensemble $e(G;A)$ a une structure de groupe abélien.

1.9. L'extension donnée par le produit semi-direct est scindée. Si $\sigma: G \to A \times G$ est une section de π on a nécessairement $\sigma(g) = (f_\sigma(g); g)$ où $f_\sigma(g) \in A$. Soit σ_1 et σ_2 deux sections de π; on dit que σ_1 est A-conjuguée à σ_2 s'il existe un élément $a \in A$ tel que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma_1(g) = \iota(a)\sigma_2(g)\iota(a)^{-1}$. On notera $[\sigma]$ la classe de A-conjugaison de la section σ et on désignera par $h(G;A)$ l'ensemble des classes de A-conjugaison des sections de π.

1.10. Si σ_1 et σ_2 sont deux sections de π on définit la section $\sigma_1 + \sigma_2$ en posant $(\sigma_1 + \sigma_2)(g) = (f_{\sigma_1}(g) + f_{\sigma_2}(g); g)$. Cette opération induit sur $h(G;A)$ une structure de groupe abélien.

2. Dérivations et extensions

2.1. Soit G un groupe. L'anneau de groupe $\mathbf{Z}G$ est muni d'une augmentation $\varepsilon: \mathbf{Z}G \to \mathbf{Z}$ donnée par $\varepsilon(\sum_{g \in G} n_g g) = \sum_{g \in G} n_g$. Si on considère $\mathbf{Z}$ avec sa structure de $\mathbf{Z}G$-module trivial à gauche, ε est un morphisme de $\mathbf{Z}G$-module et on obtient une extension de $\mathbf{Z}G$-modules

$$0 \to IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$$

où l'idéal d'augmentation IG est engendré, comme $\mathbf{Z}$-module, par l'ensemble $\{g - 1 \mid g \in G \backslash \{1\}\}$.

2.2. Soit A un $\mathbf{Z}G$-bimodule.

Une dérivation de G dans A est une application $f: G \to A$ telle que, pour tout $g, h \in G$, on ait $f(gh) = f(g) \cdot h + g \cdot f(h)$.

L'ensemble des dérivations de G dans A forme un groupe abélien noté $\mathrm{Der}(G;A)$.

Pour tout $a \in A$, l'application $f_a: G \to A$ définie par $f_a(g) = g \cdot a - a \cdot g$ est une dérivation, appelée dérivation intérieure de G dans A.