Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 34 (1988)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: EXTENSIONS DE MODULES ET COHOMOLOGIE DES GROUPES
Autor: Grivel, Pierre-Paul
Kapitel: 3. Le groupe $H^1(G;A)$
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-56590>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Donc $\omega'(u)$ est une dérivation de G dans A . On vérifie immédiatement que $\omega'\omega = 1_{\text{Der}(G; A)}$ et que $\omega\omega' = 1_{\text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG; A)}$.

2.6. On rappelle que $h(G; A)$ désigne le groupe abélien des classes de A -conjugaison des sections de l'extension de groupes donnée par le produit semi-direct $A \times G$.

PROPOSITION. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$F: h(G; A) \rightarrow \frac{\text{Der}(G; A)}{\text{Int}(G; A)}.$$

Démonstration. Il résulte de 1.9 qu'à toute section $\sigma: G \rightarrow A \times G$ on peut associer une application $f_\sigma: G \rightarrow A$ telle que, pour tout $g \in G$, on a $\sigma(g) = (f_\sigma(g); g)$. Compte tenu de la loi de multiplication du produit semi-direct et du fait que σ est un morphisme de groupes, on vérifie que $f_\sigma \in \text{Der}(G; A)$.

Si σ' est une section A -conjuguée à σ , il existe un élément $a \in A$ tel que $\sigma'(g) = \iota(a)\sigma(g)\iota(a)^{-1}$; on en déduit que $(f_{\sigma'}(g); g) = (a + f_\sigma(g) - g \cdot a; g)$ donc que $f_{\sigma'} - f_\sigma \in \text{Int}(G; A)$.

On définit alors l'application F en posant $F([\sigma]) = [f_\sigma]$, où $[f_\sigma]$ désigne la classe de f_σ dans le groupe quotient $\frac{\text{Der}(G; A)}{\text{Int}(G; A)}$.

Il est immédiat de vérifier que F est un morphisme de groupes et que F est bijective.

3. LE GROUPE $H^1(G; A)$

3.1. Soit G un groupe. Comme d'habitude on munit $\mathbf{Z}$ de sa structure de $\mathbf{Z}G$ -module à gauche trivial. De plus soit A un $\mathbf{Z}G$ -module à gauche; on considère A comme un $\mathbf{Z}G$ -bimodule en faisant agir G trivialement sur la droite de A .

On se propose de démontrer l'existence d'un isomorphisme de groupes abéliens

$$\Phi: \frac{\text{Der}(G; A)}{\text{Int}(G; A)} \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A).$$

Compte tenu de la définition des groupes $H^*(G; A)$ et de la proposition 2.6, on obtient alors le résultat classique suivant.

3.2. THÉORÈME. *Il existe un isomorphisme de groupes abéliens*

$$H^1(G; A) = h(G; A).$$

3.3. Pour construire l'application Φ on commence par considérer l'extension de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$\theta: 0 \rightarrow IG \xrightarrow{i} \mathbf{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

Soit $[f] \in \frac{\text{Der}(G; A)}{\text{Int}(G; A)}$ représentée par une dérivation $f \in \text{Der}(G; A)$; d'après la proposition 2.5 on peut associer à f un morphisme $\tilde{f} = \omega(f) \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}G}(IG; A)$.

En faisant le produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ on obtient l'extension de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$\tilde{f}\theta: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

Le $\mathbf{Z}G$ -module F est le quotient de $\mathbf{Z}G \times A$ par le sous-module engendré par l'ensemble $\{(i(x); -\tilde{f}(x)) \mid x \in IG\}$. Si $\pi: \mathbf{Z}G \times A \rightarrow F$ est la projection canonique, les morphismes α et β sont définis en posant $\alpha(a) = \pi(0; a)$ et $\beta\pi(x; a) = \varepsilon(x)$.

Si $f' \in \text{Der}(G; A)$ est un autre représentant de $[f]$ on lui associe de la même façon l'extension de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$\tilde{f}'\theta: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha'} F' \xrightarrow{\beta'} \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

3.4. LEMME. *Les extensions $\tilde{f}\theta$ et $\tilde{f}'\theta$ sont équivalentes.*

Démonstration. Il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$ -modules $\delta: F \rightarrow F'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z} \rightarrow 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha'} & F' & \xrightarrow{\beta'} & \mathbf{Z} \rightarrow 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Par hypothèse il existe $b \in A$ tel que $f' - f = f_b$ où $f_b \in \text{Int}(G; A)$.

On définit alors un morphisme de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$\Delta: \mathbf{Z}G \times A \rightarrow \mathbf{Z}G \times A$$

en posant $\Delta(x; a) = (x; a - x \cdot b)$.

Si $x \in IG$ on peut écrire $x = \sum_{g \in G} n_g(g-1)$ si bien qu'en utilisant la proposition 2.5 on a

$$\begin{aligned} x \cdot b &= \sum_{g \in G} n_g(g \cdot b - b) = \sum_{g \in G} n_g f_b(g) = \sum_{g \in G} n_g \tilde{f}_b(g-1) \\ &= \tilde{f}_b \left(\sum_{g \in G} n_g(g-1) \right) = \tilde{f}_b(x). \end{aligned}$$

On a donc $\Delta(x; -\tilde{f}(x)) = (x; -\tilde{f}(x) - \tilde{f}_b(x)) = (x; -\tilde{f}'(x))$ et on définit δ par la condition $\pi' \Delta = \delta \pi$.

On vérifie immédiatement que $\delta \alpha = \alpha'$ et $\beta' \delta = \beta$.

3.5. L'application Φ est alors donnée en posant $\Phi([f]) = [\tilde{f}\theta]$.

3.6. On construit maintenant une application

$$\Psi: \text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A) \rightarrow \frac{\text{Der}(G; A)}{\text{Int}(G; A)}.$$

Soit $[\xi] \in \text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A)$ représentée par une extension de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$\xi: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

Choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$ et considérons la dérivation $f_e \in \text{Int}(G; E)$.

Comme on a $\mu f_e = 0$ on peut définir une application $f^e: G \rightarrow A$ par la condition $\lambda f^e = f_e$.

3.7. LEMME. $f^e \in \text{Der}(G; A)$ et $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e .

Démonstration. Pour tous $g, h \in G$ on a

$$\begin{aligned} \lambda f^e(gh) &= (gh) \cdot e - e = g \cdot (h \cdot e - e) + g \cdot e - e \\ &= g \cdot \lambda f^e(h) + \lambda f^e(g) \\ &= \lambda(g \cdot f^e(h) + f^e(g)). \end{aligned}$$

Comme λ est injectif il en résulte que $f^e \in \text{Der}(G; A)$. Soit $e' \in E$ tel que $\mu(e') = 1$; puisque $\mu(e - e') = 0$ il existe $b \in A$ tel que $\lambda(b) = e - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \text{Int}(G; A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\begin{aligned} \lambda(f^e - f^{e'})(g) &= (g \cdot e - e) - (g \cdot e' - e') \\ &= g \cdot \lambda(b) - \lambda(b) \\ &= \lambda(g \cdot b - b) = \lambda f_b(g). \end{aligned}$$

Ainsi $f^e - f^{e'} \in \text{Int}(G; A)$ et par suite $[f^e]$ ne dépend pas du choix de e .

3.8. Supposons maintenant que l'extension de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$\xi': 0 \rightarrow A \xrightarrow{\lambda'} E' \xrightarrow{\mu'} \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

est un autre représentant de $[\xi]$.

En choisissant un élément $e' \in E'$ tel que $\mu'(e') = 1$ on définit une dérivation $f^{e'} \in \text{Der}(G; A)$.

3.9. LEMME. $f^e - f^{e'} \in \text{Int}(G; A)$.

Démonstration. Les extensions ξ et ξ' étant équivalentes, il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$ -modules $\gamma: E \rightarrow E'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} \rightarrow 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\lambda'} & E' & \xrightarrow{\mu'} & \mathbf{Z} \rightarrow 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Comme $\mu'(\gamma(e) - e') = 0$, il existe $b \in A$ tel que $\lambda'(b) = \gamma(e) - e'$.

Considérons la dérivation $f_b \in \text{Int}(G; A)$. Pour tout $g \in G$ on a

$$\begin{aligned} \gamma\lambda(f^e - f^{e'})(g) &= \gamma\lambda f^e(g) - \lambda' f^{e'}(g) \\ &= \gamma(g \cdot e - e) - (g \cdot e' - e') \\ &= g \cdot (\gamma(e) - e') - (\gamma(e) - e') \\ &= \lambda'(g \cdot b - b) \\ &= \gamma\lambda f_b(g). \end{aligned}$$

Comme γ est un isomorphisme et λ est injectif il en résulte que $f^e - f^{e'} \in \text{Int}(G; A)$.

3.10. On peut donc définir l'application Ψ en posant $\Psi([\xi]) = [f^e]$, et il faut vérifier que Ψ est la réciproque de Φ .

3.11. LEMME. $\Psi\Phi = \frac{1_{\text{Der}(G; A)}}{\text{Int}(G; A)}$.

Démonstration. Si $[f] \in \frac{\text{Der}(G; A)}{\text{Int}(G; A)}$ est représentée par $f \in \text{Der}(G; A)$

alors $\Psi\Phi([f]) = \Psi([\tilde{f}\theta])$ où $\tilde{f}\theta$ est l'extension de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

décrite au n° 3.3.

Par définition du produit cofibré de θ par $\tilde{f}$ il existe un morphisme de $\mathbf{Z}G$ -modules $\gamma: \mathbf{Z}G \rightarrow F$, défini par $\gamma(x) = \pi(x; 0)$, tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & IG & \xrightarrow{i} & \mathbf{Z}G & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathbf{Z} \rightarrow 0 \\ & & \tilde{f} \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z} \rightarrow 0 \end{array}$$

soit commutatif.

L'élément $e = \pi(1; 0) \in F$ vérifie la condition $\beta(e) = 1$; donc $\Psi([\tilde{f}\theta])$ est représentée par la dérivation $f^e \in \text{Der}(G; A)$ telle que, pour tout $g \in G$, on ait $\alpha f^e(g) = g \cdot e - e = \pi(g-1; 0)$.

Or on a $f^e = f$; en effet, compte tenu de la proposition 2.5 on a, pour tout $g \in G$,

$$\begin{aligned} \alpha(f^e - f)(g) &= \alpha f^e(g) - \alpha \tilde{f}(g-1) \\ &= \alpha f^e(g) - \gamma(g-1) \\ &= \pi(g-1; 0) - \pi(g-1; 0) = 0. \end{aligned}$$

3.12. LEMME. $\Phi\Psi = 1_{\text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A)}$.

Démonstration. Soit $[\xi] \in \text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A)$ représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$\xi: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\lambda} E \xrightarrow{\mu} \mathbf{Z} \rightarrow 0$$

et choisissons un élément $e \in E$ tel que $\mu(e) = 1$; on a alors $\Phi\Psi([\xi]) = [\tilde{f}^e\theta]$.

Il s'agit donc de démontrer que les extensions ξ et $\tilde{f}^e\theta$ sont équivalentes; pour cela il faut construire un morphisme de $\mathbf{Z}G$ -modules $\delta: E \rightarrow F$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} \rightarrow 0 \\ & & 1_A \downarrow & & \delta \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z}} \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & F & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{Z} \rightarrow 0 \end{array}$$

soit commutatif.

Si $u \in E$ on a $\mu(u - \mu(u)e) = 0$; on peut donc définir un morphisme de groupes abéliens $\nu: E \rightarrow A$ tel que $\lambda\nu(u) = u - \mu(u)e$ pour tout $u \in E$.

Définissons alors δ en posant $\delta(u) = \pi(\mu(u); \nu(u))$. Il faut vérifier que δ est un morphisme de $\mathbf{Z}G$ -modules; or si $g \in G$ et $u \in E$ on a

$$g \cdot \delta(u) - \delta(g \cdot u) = \pi(\mu(u)(g-1); g \cdot \nu(u) - \nu(g \cdot u)).$$

Mais

$$\begin{aligned}\lambda(g \cdot v(u) - v(g \cdot u)) &= g \cdot (u - \mu(u)e) - (g \cdot u - \mu(u)e) \\ &= -\mu(u)(g \cdot e - e) \\ &= -\mu(u)\lambda f^e(g) \\ &= \lambda(-\mu(u)\tilde{f}^e(g-1)).\end{aligned}$$

Il en résulte que $g \cdot \delta(u) - \delta(g \cdot u) = 0$.

Finalement on vérifie immédiatement que $\delta\lambda = \alpha$ et $\beta\delta = \mu$.

3.13. Il reste à montrer que l'application Ψ est un morphisme de groupes abéliens.

Soit $[\xi_i] \in \text{Ext}_{\mathbf{Z}G}^1(\mathbf{Z}; A)$ ($i=1, 2$) représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$ -modules

$$\xi_i: 0 \rightarrow A \xrightarrow{\lambda_i} E_i \xrightarrow{\mu_i} \mathbf{Z} \rightarrow 0.$$

On choisit un élément $e_i \in E_i$ tel que $\mu_i(e_i) = 1$ et on considère la dérivation $f^{e_i} \in \text{Der}(G; A)$ définie par $\lambda_i f^{e_i}(g) = g \cdot e_i - e_i$.

On a alors $\Psi([\xi_1]) + \Psi([\xi_2]) = [f^{e_1}] + [f^{e_2}] = [f^{e_1} + f^{e_2}]$.

Maintenant $[\xi_1] + [\xi_2]$ est représentée par l'extension de $\mathbf{Z}G$ -modules $\xi_0 = \nabla(\xi_1 \oplus \xi_2)\Delta$ et on a le diagramme commutatif suivant

$$(3.13.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A \oplus A & \xrightarrow{\lambda_1 \oplus \lambda_2} & E_1 \oplus E_2 & \xrightarrow{\mu_1 \oplus \mu_2} & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow 0 \\ & & \nabla \downarrow & & \gamma \downarrow & & \downarrow 1_{\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}} \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\lambda} & E & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \rightarrow 0 \\ & & 1_A \uparrow & & \delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\ 0 & \rightarrow & A & \xrightarrow{\lambda_0} & E_0 & \xrightarrow{\mu_0} & \mathbf{Z} \rightarrow 0. \end{array}$$

On choisit un élément $e_0 \in E_0$ tel que $\mu_0(e_0) = 1$ et on considère la dérivation $f^{e_0} \in \text{Der}(G; A)$ définie par $\lambda_0 f^{e_0}(g) = g \cdot e_0 - e_0$.

On a alors $\Psi([\xi_1] + [\xi_2]) = [f^{e_0}]$.

3.14. LEMME. $f^{e_1} + f^{e_2} - f^{e_0} \in \text{Int}(G; A)$.

Démonstration. Comme $\mu(\gamma(e_1; e_2) - \delta(e_0)) = 0$, il existe un élément $a \in A$ tel que $\lambda(a) = \gamma(e_1; e_2) - \delta(e_0)$. Considérons la dérivation $f_a \in \text{Int}(G; A)$. Pour tout $g \in G$ on a, compte tenu du diagramme (3.13.1),

$$\lambda(f^{e_1}(g) + f^{e_2}(g) - f^{e_0}(g) - f_a(g)) = 0.$$