Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1989)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES NON RÉSOLUS EN GÉOMÉTRIE PLANE
Autor: de la Harpe, P.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57375

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 227-243

QUELQUES PROBLÈMES NON RÉSOLUS EN GÉOMÉTRIE PLANE [1])

par P. DE LA HARPE

Nul n'ignore que le peuple de Babylone est très féru de logique, et même de symétrie.

(J. L. BORGES, *La loterie de Babylone*)

Le métier du mathématicien consiste, pour une part importante, à tenter de résoudre des problèmes encore ouverts. Mais les observateurs extérieurs au métier ont souvent une grande peine à réaliser qu'il existe encore de tels problèmes, car ils sont amenés à croire (bien à tort) que « depuis le temps, il n'y a plus rien à chercher ». S'ils ont une excuse, c'est que, souvent, la moindre allusion à un problème de recherche contemporain leur semble parfaitement inaccessible.

Il existe pourtant un petit nombre d'exceptions: des questions dont la formulation au moins devrait être claire à la majorité des lecteurs de ce cahier. Le but de cet article est d'introduire un échantillon de telles questions, qui se posent naturellement en géométrie, et auxquelles personne jusqu'ici n'a pu répondre complètement. Les motivations des chercheurs qui s'y intéressent sont multiples. Citons:

— La fascination pour les figures à motifs répétés (fascination exemplaire chez l'artiste M. C. Escher, comme en témoigne par exemple le livre de Locher *et al.* cité en fin d'article).

— Des problèmes d'indécidabilité en logique mathématique (travaux de H. Wang, R. Berger et R. M. Robinson, voir les références).

— L'intérêt physique, sans doute aussi industriel, de certains quasi-cristaux récemment découverts et présentement à la pointe de l'actualité. (Nouveaux alliages, par exemple d'aluminium et manganèse ou de nickel et chrome, aux propriétés mécaniques exceptionnelles; voir la référence à Schechtman *et al.*) La structure de ces quasi-cristaux pose de nouveaux problèmes géométriques du type de ceux discutés ici.

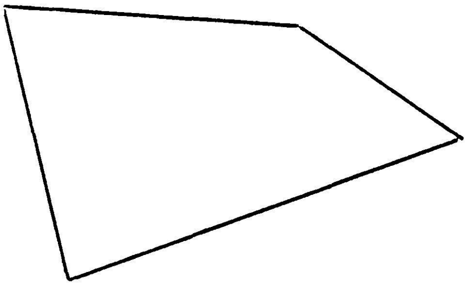
---

[1]) Ce texte est repris d'une publication interne de l'Université de Genève: les « Cahiers de la Faculté des Sciences » (n° 13, mai 1986).

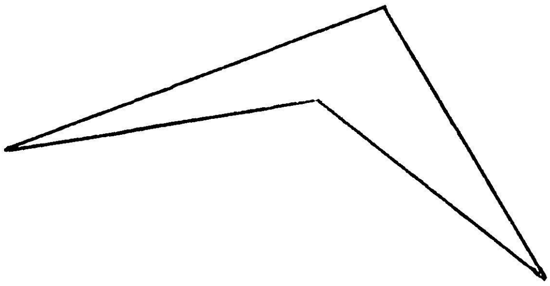
Le texte qui suit se divise en trois paragraphes: le premier introduit la notion de pavage, le second celle de périodicité, et le dernier fait allusion aux applications logiques et physiques.

1. Quels sont les polygones qui pavent le plan?

Considérons un polygone P à n côtés, représenté par une brique plate; ce polygone est dit *convexe* s'il n'a pas d'angle rentrant.



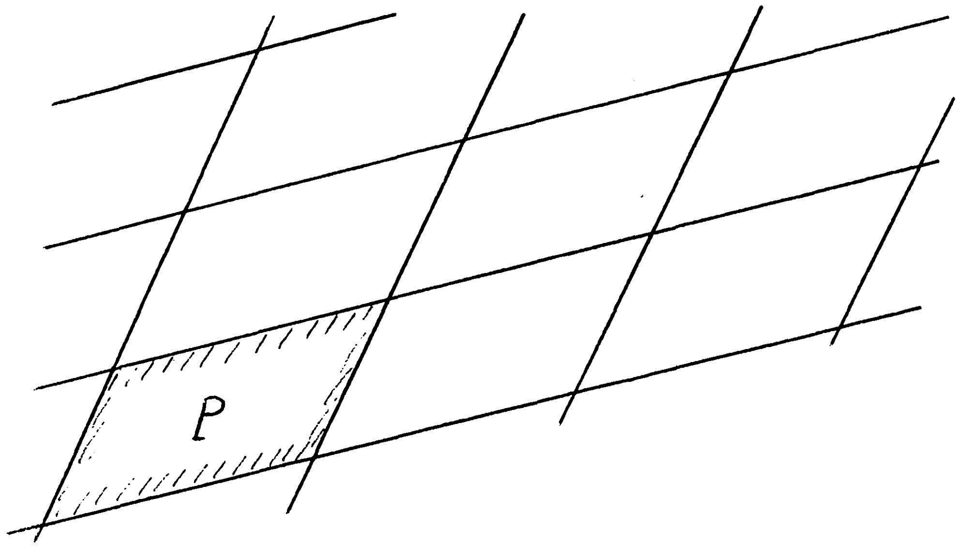
exemple convexe



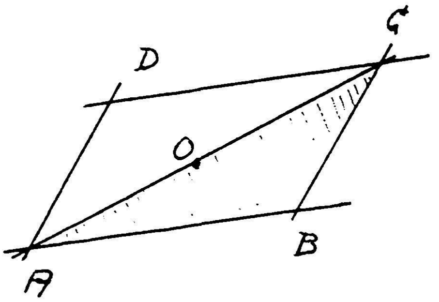
exemple non convexe

La question est de savoir quand et comment on peut recouvrir le plan tout entier sans trou ni chevauchement avec une famille de polygones égaux (= superposables) au modèle P. Autrement dit, imaginez une foultitude de carreleurs disposant d'un train chargé de briques toutes égales entre elles; quelles sont les conditions sur l'entier n, les n longueurs, et les n angles de P qui permettent aux carreleurs de paver Plainpalais? (On adopte ici le point de vue d'un carreleur pour qui Plainpalais serait un modèle de plan illimité.)

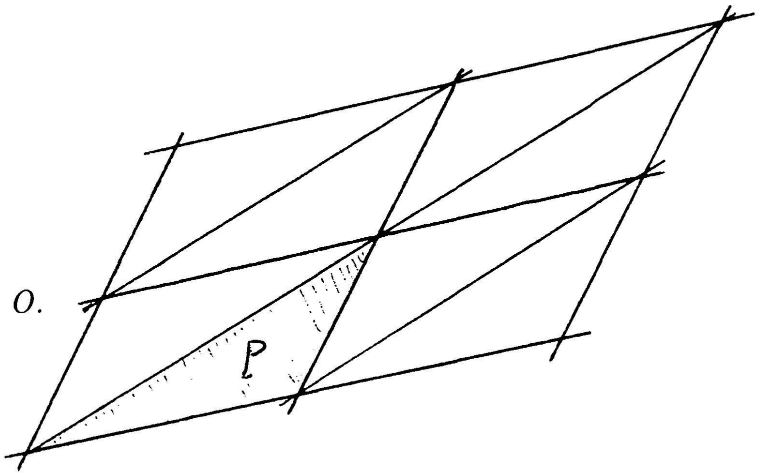
Il y a des cas particuliers à réponses immédiates, faciles ou connues. Par exemple, si $n = 4$ et si P est un parallélogramme, la réponse est oui



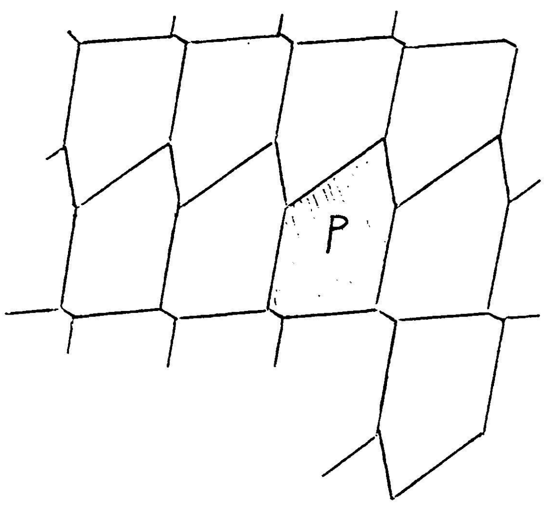
comme le suggère immédiatement un dessin. On dit qu'un parallélogramme *pave le plan.* Il en résulte que *tout triangle pave* aussi le plan, car deux copies d'un même triangle convenablement juxtaposées constituent un parallélogramme.



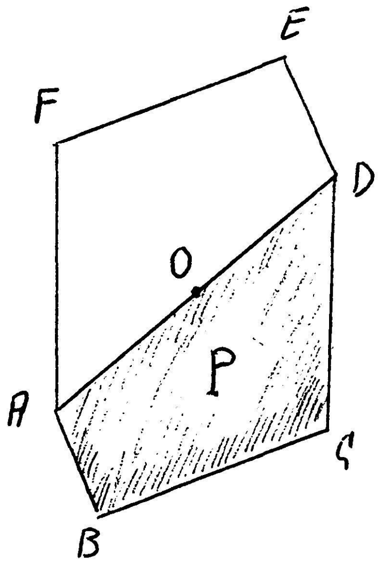
CDA est obtenu à partir de *ABC*
par rotation d'un demi-tour centrée en *O*.



Il est aussi vrai que *tout quadrilatère pave* le plan, et on peut s'en assurer comme suit. On observe d'abord qu'un hexagone (polygone à 6 côtés) ayant une paire de côtés opposés parallèles et de même longueur pave le plan :



Ensuite, on remarque que deux copies d'un même quadrilatère convenablement juxtaposées constituent un tel hexagone (pour lequel les trois paires de côtés opposés satisfont la condition d'être parallèles et de même longueur) :

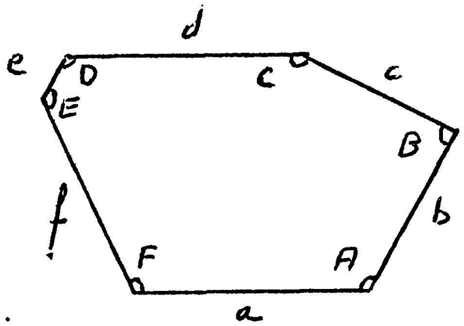


DEFA est obtenu à partir de *ABCD* par rotation d'un demi-tour centrée en *O*.

Ceci montre bien que tout quadrilatère (même non convexe) pave le plan.

Etant donné un hexagone convexe, on sait exactement quand il pave le plan. Le résultat date de la thèse d'un étudiant de D. Hilbert, du nom de K. Reinhardt (1918); reformulons-le comme suit (en rappelant que 2π désigne un angle de 360°):

THÉORÈME. *Un hexagone convexe* $P = ABCDEF$ *pave le plan si et seulement s'il est de l'un (au moins) des types suivants:*

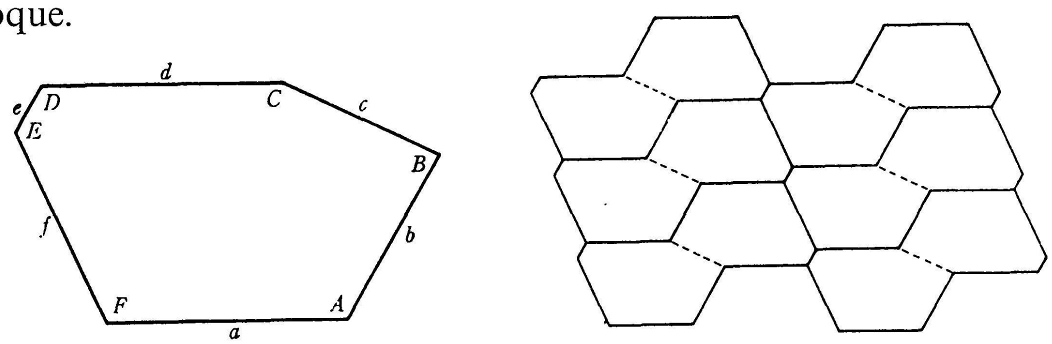


(1) $A + B + C = 2\pi, a = d$
(cas évoqué plus haut);

(2) $A + B + D = 2\pi,\ a = d,\ c = e$;

(3) $A = C = E = 2\pi/3,\ a = b,\ c = d,\ e = f$.

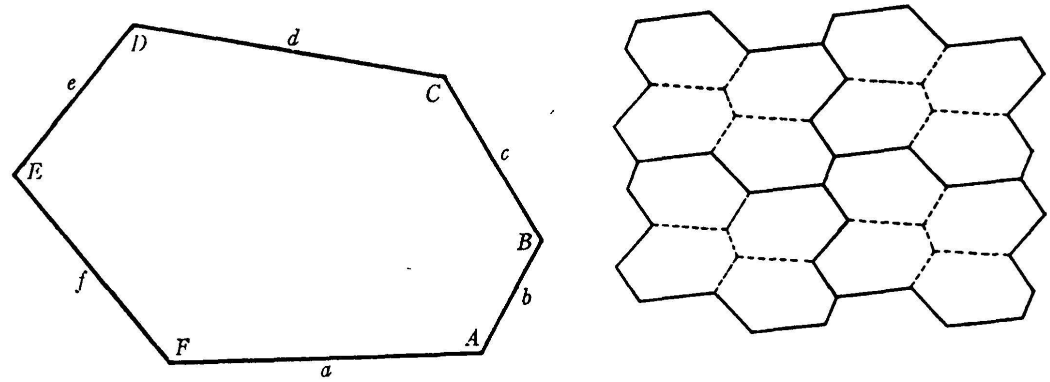
Les figures qui suivent proviennent d'un article de R. B. Kershner (1968), et devraient permettre au lecteur de se convaincre que les hexagones des types (1), (2) et (3) pavent le plan. Nous ne justifierons pas l'assertion réciproque.



(a) Un hexagone. (b) Partie du pavage.

FIGURE 1.

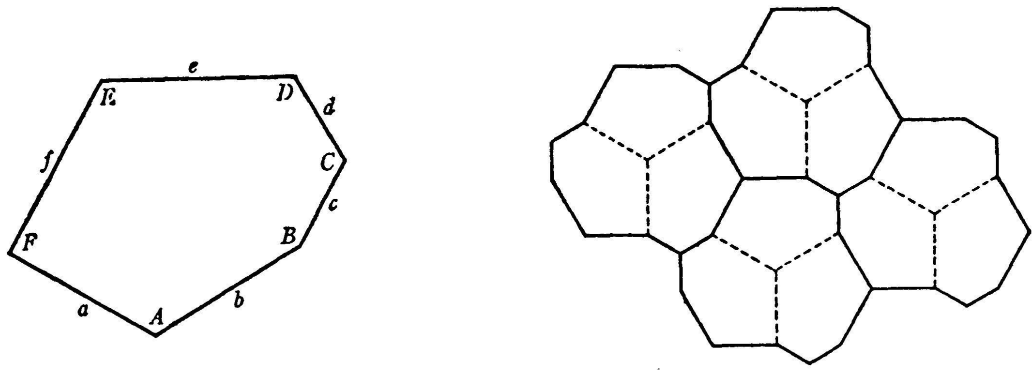
Hexagone de type 1; $A + B + C = 2\pi, a = d$.



(a) Un hexagone. (b) Partie du pavage.

FIGURE 2.

Hexagone de type 2 ; $A + B + D = 2\pi, a = d, c = e.$



(a) Un hexagone. (b) Partie du pavage.

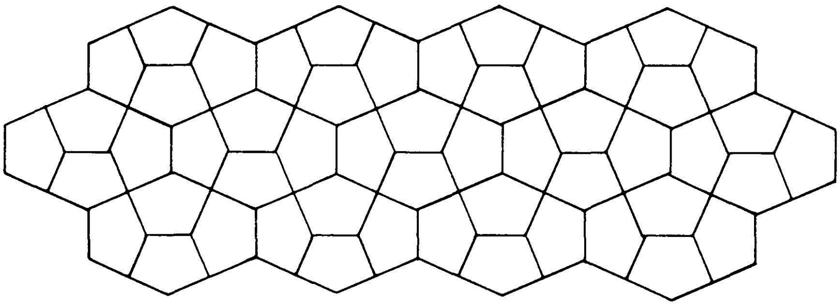
FIGURE 3.

Hexagone de type 3 ; $A = C = E = 2\pi/3, a = b, c = d, e = f.$

Au contraire, le cas des pentagones (5 côtés) n'est pas résolu.

PROBLÈME OUVERT : trouver des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un pentagone convexe $ABCDE$ pave le plan.

On sait bien que certains pentagones ne pavent pas. Il en est ainsi des pentagones réguliers (5 côtés égaux et 5 angles égaux à $3\pi/5$). Notons que c'est sans doute Képler (1571-1630) qui le premier a montré cela, et plus généralement que les seuls polygones réguliers qui pavent le plan sont à 3, 4 ou 6 côtés ; on vérifie expérimentalement ce résultat en contemplant les sols de nombreuses salles de bain. Il est d'autre part facile d'exhiber des pentagones qui pavent, et il paraît qu'on en voit même dans les rues du Caire :



Mais on n'a pas encore trouvé de critère général, comme pour les hexagones. Pour l'histoire rebondissante de ce problème (qui a passé pour être résolu entre 1968 et 1975 et qui a ensuite bénéficié des critiques et contributions de mathématiciens amateurs), voir les comptes rendus de D. Schattschneider.

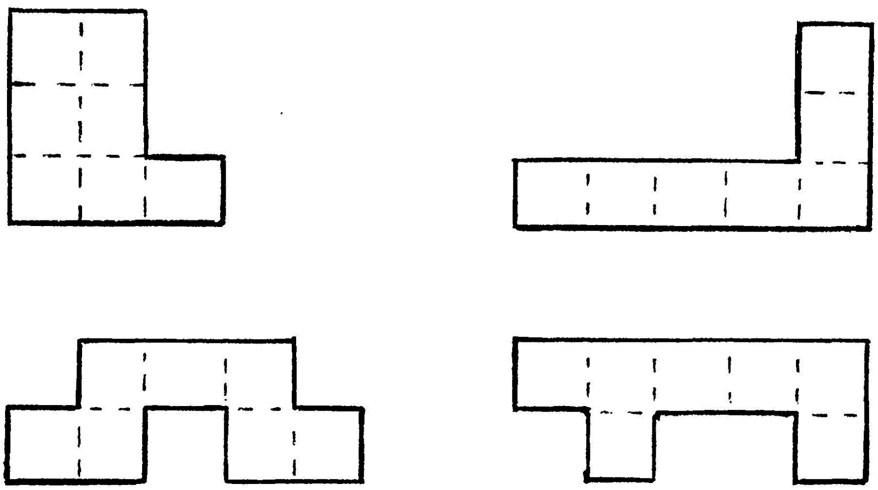
Le fait que le problème en discussion soit encore ouvert pour les pentagones est d'autant plus frappant qu'il est résolu pour tout polygone convexe à $n \neq 5$ côtés. Si $n = 3$, $n = 4$ ou $n = 6$: voir plus haut. Si $n \geqslant 7$, un polygone convexe à n côtés *ne pave jamais le plan.* On connaît des résultats beaucoup plus forts: soit $P_1, P_2, P_3, \ldots$ une suite de polygones convexes ayant respectivement $n_1, n_2, n_3, \ldots$ côtés, soumis aux conditions

(i) $n_j \geqslant 7$ pour $j = 1, 2, 3, \ldots$

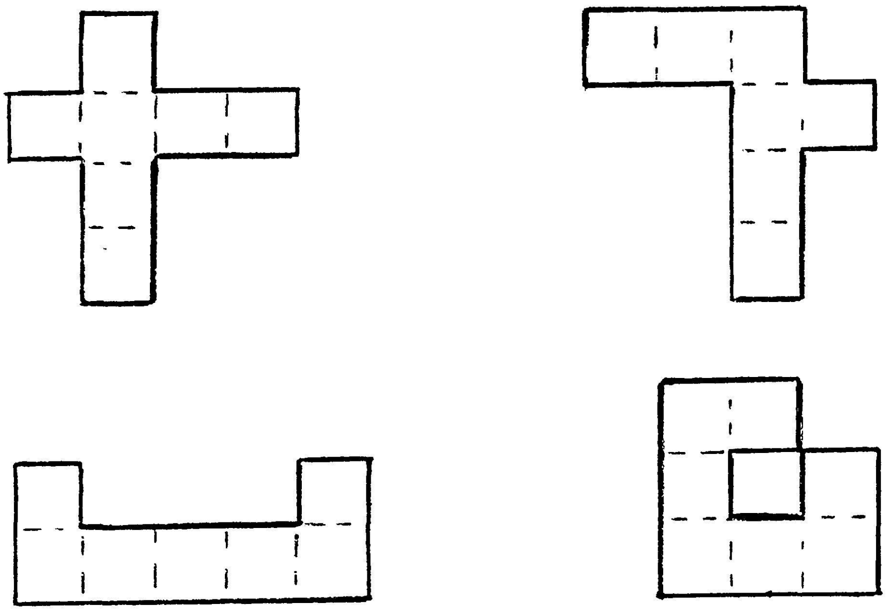
(ii) il existe deux constantes α, β telles que l'aire de P_j soit minorée par α et le périmètre de P_j soit majoré par β pour $j = 1, 2, 3, \ldots$

Alors il n'est pas possible de recouvrir avec des copies des P_j un domaine plan contenant un carré de côté $4\beta + 32\beta^3/\alpha$ (I. Niven, 1978). En particulier, avec une suite finie $P_1, P_2, \ldots, P_k$ vérifiant (i), il n'est jamais possible de paver le plan.

Pour n grand, on peut alors étendre le problème aux polygones non convexes à n côtés. Par exemple, J. H. Conway a étudié les *heptominos*; ce sont les figures obtenues en disposant l'un après l'autre 7 carrés égaux, tout carré devant avoir un côté commun avec l'un au moins des précédents. Il y a 108 espèces d'heptominos, dont précisément 104 pavent le plan:



4 des 104 heptominos qui pavent le plan (voir les deux puzzles résolus en fin d'article).



Les 4 heptominos qui ne pavent pas.

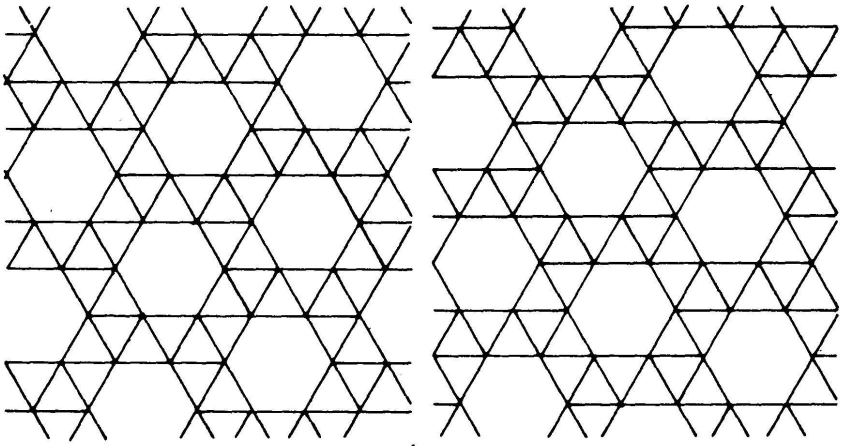
De même, il y a 369 octominos dont 343 pavent le plan. En revanche, le domino, les 2 triminos, les 5 quadriminos, les 12 pentominos et les 35 hexominos pavent tous le plan (Gardner, août 1975).

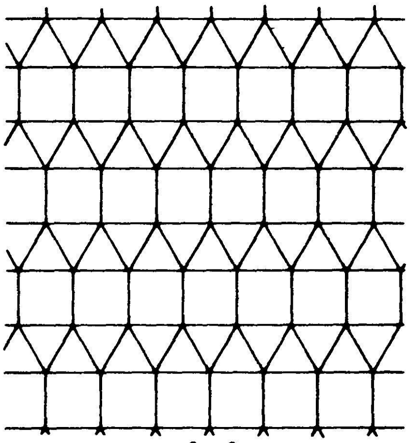
2. Périodicité

Une *généralisation naturelle* possible du problème discuté jusqu'ici se formule comme suit: soit $P_1, P_2, ..., P_k$ une famille (finie) de polygones plans, considérés comme briques modèles (on n'a plus nécessairement $k = 1$, et les polygones peuvent être non convexes). Existe-t-il un pavage du plan par des polygones dont chacun est superposable à l'un des modèles? Et si oui, quelles sont les propriétés des pavages possibles?

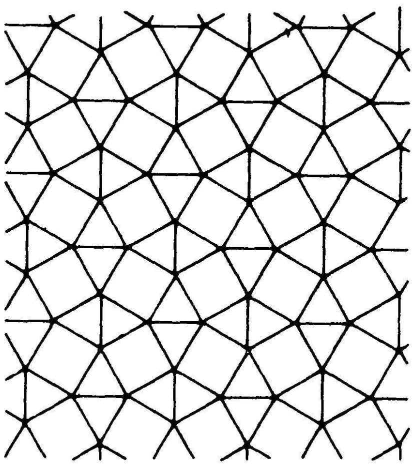
Avant de formuler des problèmes ouverts, évoquons à titre d'exemple une famille remarquable de tels pavages, pour chacun desquels on a $k = 2$ ou $k = 3$. Ce sont des pavages dits semi-réguliers: chaque tuile est un polygone régulier, deux tuiles qui se touchent ont en commun un sommet ou un côté entier, et les sommets du pavage « ont tous le même type ». C'est à nouveau Képler qui le premier a vu (montré?) que la figure suivante donne à changement d'échelle près tous les pavages semi-réguliers non réguliers. La figure est recopiée de (Grünbaum et Shephard, 1981).

On dit qu'un pavage est *périodique* s'il existe deux translations de directions distinctes qui transforment le pavage en lui-même.

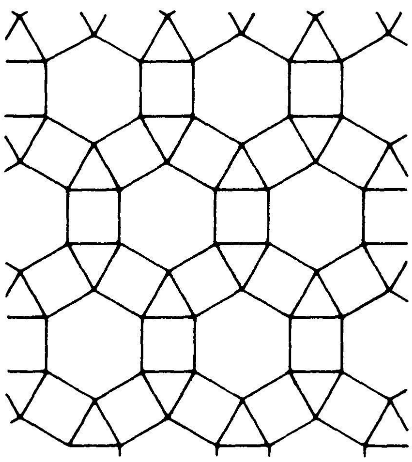




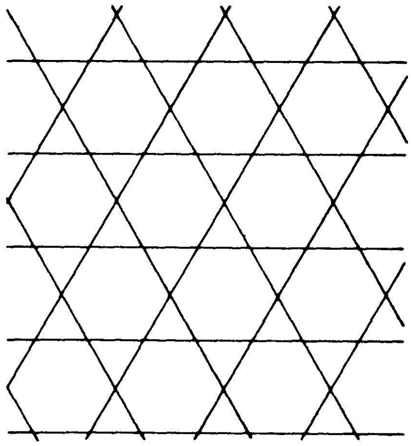
$(3^4.6)$ **$(3^3.4^2)$**



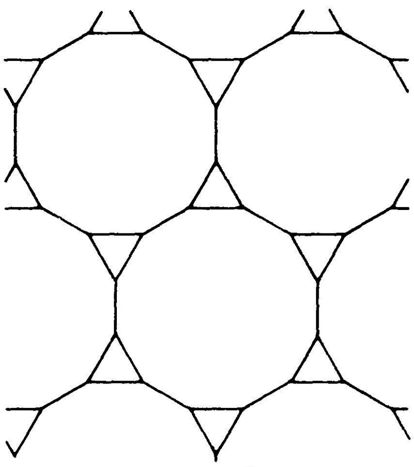
$(3^2.4.3.4)$



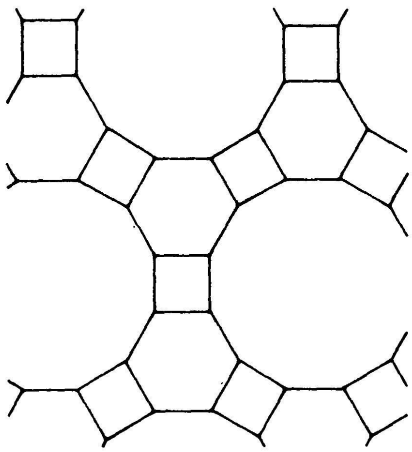
(3.4.6.4)



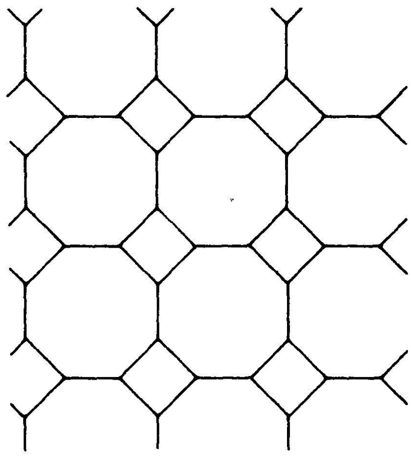
(3.6.3.6)



(3.12^2)



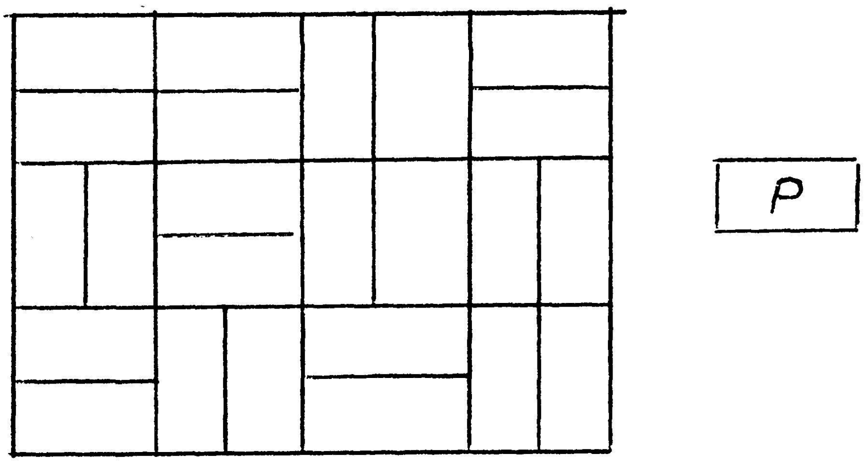
(4.6.12)



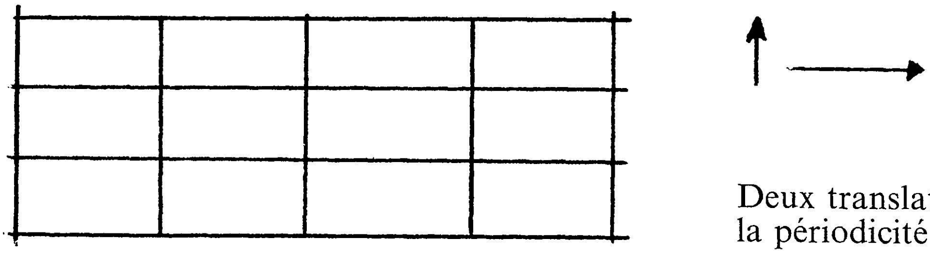
(4.8^2)

Les huit pavages uniformes non réguliers. Dans chacun d'eux, les briques sont des polygones réguliers, et il existe des symétries du pavage qui appliquent tout sommet donné sur tout autre sommet. L'un des pavages (désigné par $(3^4.6)$) se présente sous deux aspects, comme une image et sa réflexion dans un miroir. C'est sans doute Képler, au début du XVII^e, qui a découvert et compris ces pavages comme constituant une famille.

Comme premier exemple, considérons une famille $P_1, ..., P_k$ réduite à un unique rectangle P $(k=1)$, deux fois plus long que large. Il est facile de construire un pavage *non* périodique avec des copies de P, par exemple en partageant « au hasard » les carrés d'un pavage régulier :

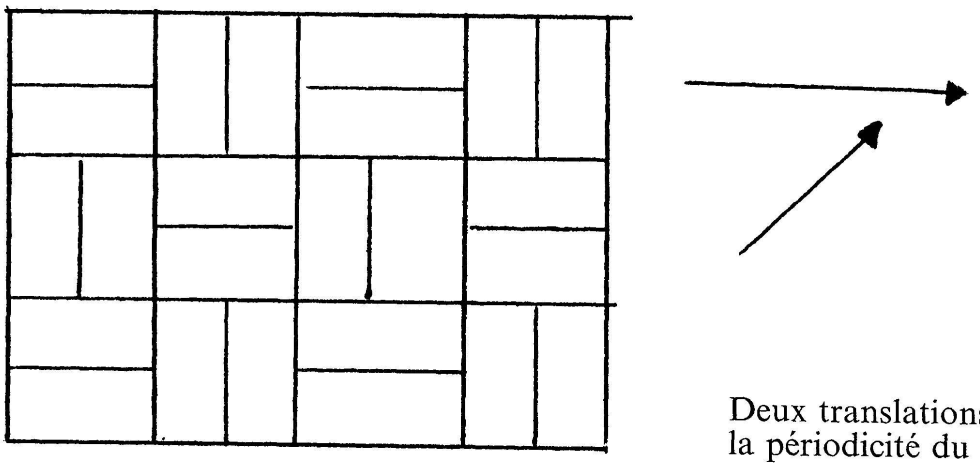


Mais, encore plus évidemment, le même rectangle pave aussi périodiquement :



Deux translations montrant la périodicité du pavage.

ou encore :



Deux translations montrant la périodicité du pavage.

Problème ouvert: existe-t-il un polygone qui pave le plan, mais qui ne peut pas paver le plan périodiquement?

(Digression pour mathématiciens: Dans la deuxième partie de son 18^e problème, Hilbert demande s'il existe un polygone qui pave le plan, mais qui ne puisse pas être domaine fondamental du groupe des symétries d'un pavage. La réponse est oui. Après un exemple compliqué en dimension 3 dû à K. Reinhardt (1928), la réponse a été donnée en 1935 par Heesch qui a trouvé un décagone (non convexe) convenable. Enfin Kershner a trouvé 3 types de pentagones convexes qui répondent à la question de Hilbert. Toutefois ces exemples permettent de paver le plan périodiquement: les pavages ont une cellule fondamentale formée d'un nombre fini de copies du modèle, et cette cellule se répète périodiquement; voir les pavages hexagonaux du § 1.)

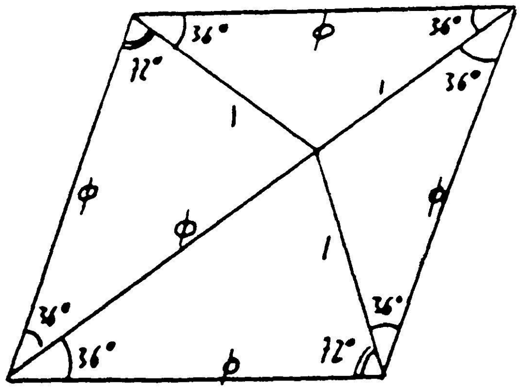
L'analogue du problème précédent pour une famille $P_1, P_2, ..., P_k$ avec $k > 1$ a été résolu, assez récemment. On connaît en effet des exemples de telles familles qui pavent le plan mais qui ne peuvent pas paver le plan périodiquement pour

$k > 1000$	(R. Berger, 1964)
$k = 6$	(R. M. Robinson, 1971)
$k = 2$	(R. Penrose, 1974).

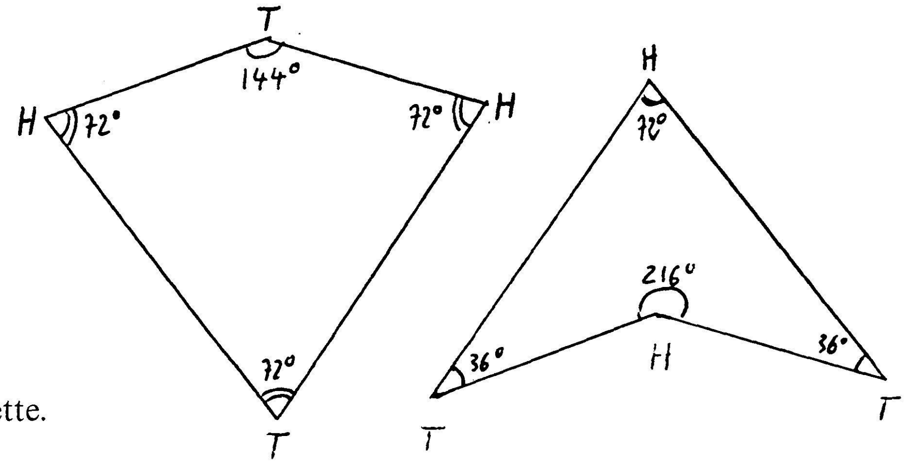
Décrivons comme suit la famille de Penrose. On considère d'abord un losange dont les angles aigus mesurent $2\pi/5 = 72^\circ$ et les angles obtus $3\pi/5 = 108^\circ$, et dont les côtés ont une longueur (dans une unité convenable) de

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803...$$

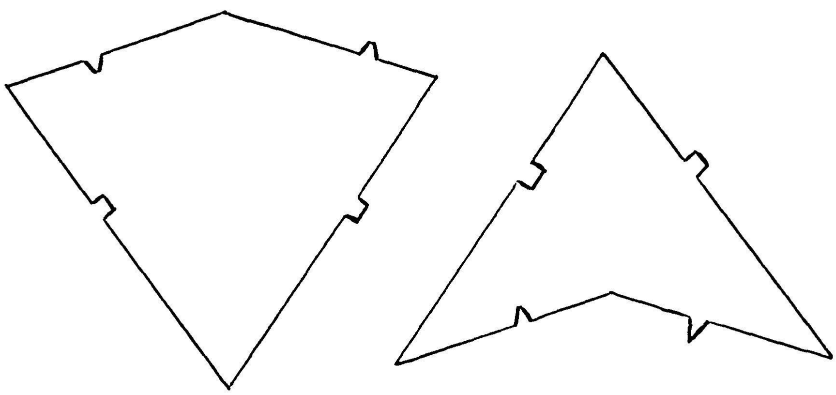
On divise la longue diagonale en deux segments de longueurs ϕ et 1, on joint le point de division aux deux sommets obtus du losange, et on découpe selon ces jointures. On obtient ainsi deux quadrilatères appelés *cerf-volant* et *fléchette*, qui sont essentiellement les deux briques de Penrose. De plus, on marque chaque sommet par H ou T comme indiqué sur la figure, et on interdit aux pavages d'accoler un sommet du type T et un sommet du type H. L'interdiction peut être matérialisée par des saillies et encoches de deux types, de sorte que l'assemblage de briques superposables à l'un des deux modèles devient un problème de puzzle ordinaire.



Le losange.

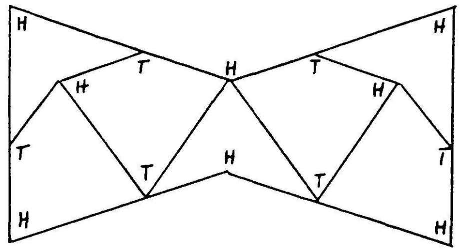


Le cerf-volant et la fléchette.

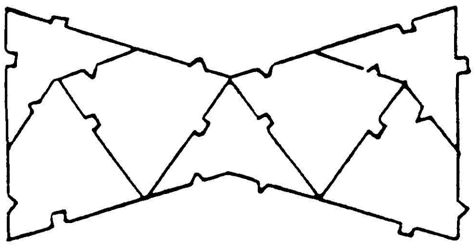


Avec saillies et encoches.

Voici, à une échelle différente, la représentation d'un puzzle assemblé, d'abord avec les sommets marqués T ou H:



et ensuite avec les saillies et encoches:



Il y a une infinité de manières d'assembler cerf-volants et fléchettes pour former des pavages du plan. Ces pavages ont des propriétés propres à rendre perplexes les plus blasés, par exemple:

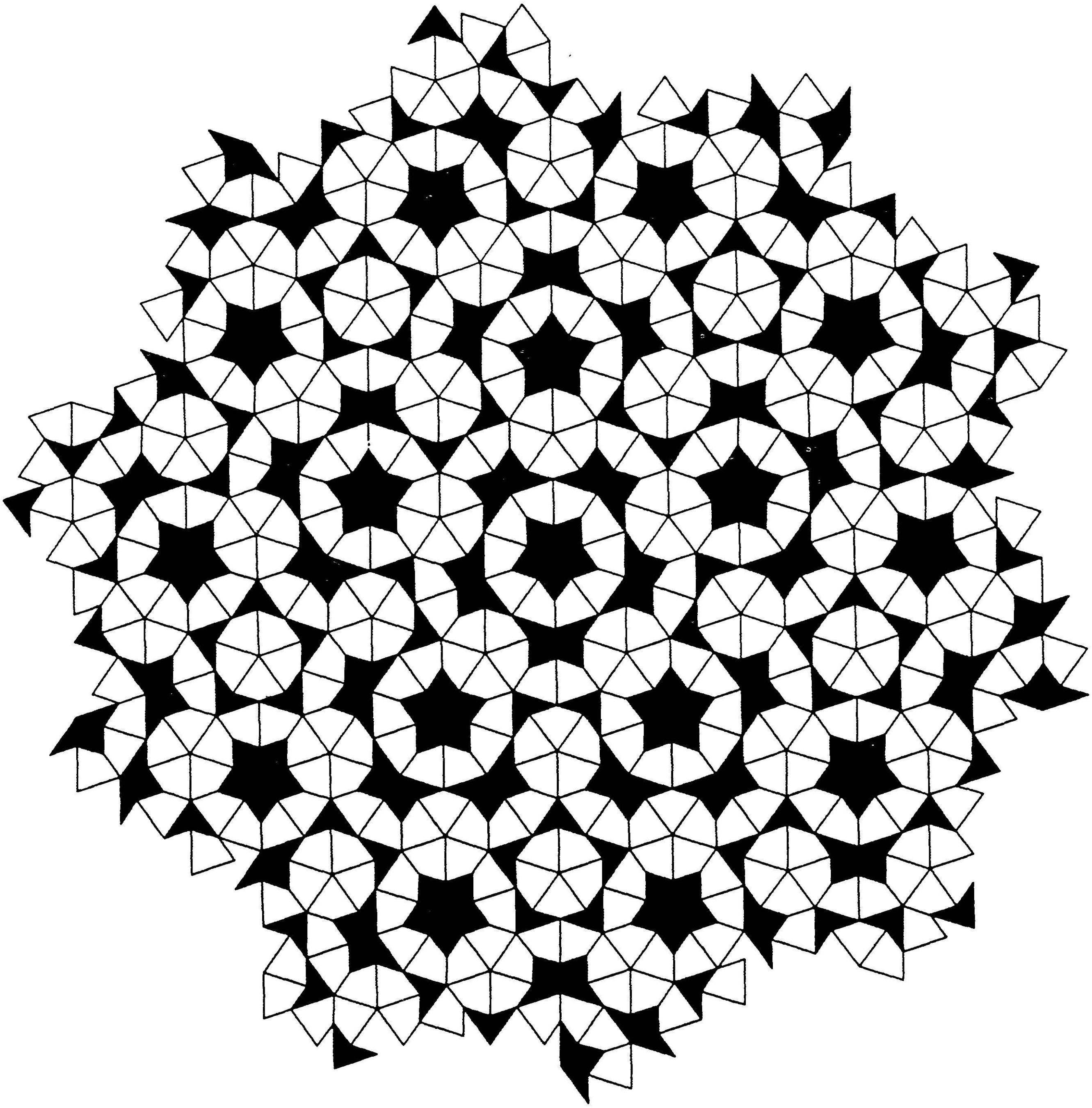
(i) il n'existe aucune translation transformant aucun de ces pavages en lui-même,

(ii) toute partie finie d'un pavage est répétée une infinité de fois dans ce pavage (!)

(iii) étant donnés deux pavages et une partie finie de l'un d'entre eux, elle se retrouve dans l'autre (bien que les deux pavages soient globalement distincts).

La propriété (ii) est typique de ce qu'on appelle la *quasi-périodicité*.

La figure suivante représente un puzzle plus grand, avec les cerfs-volants en blanc et les fléchettes en noir (le lecteur doit imaginer des séparations entre fléchettes juxtaposées). Je remercie J. P. Eckmann qui a programmé son ordinateur pour ce dessin.



3. Applications

L'intérêt des problèmes de pavage dépasse très largement le cadre de la géométrie plane. C'est par exemple des travaux de *logique mathématique* qui, en 1961, ont conduit H. Wang à poser un problème du type de ceux discutés au § 2:

On demande si la première question du § 2 est *décidable*, dans le sens technique de ce terme utilisé par Robinson. En d'autres termes on demande s'il existe un programme d'ordinateur qui, étant donné une famille $P_1, \ldots, P_k$ de polygones plans, indique si oui ou non cette famille pave le plan.

La notion de « programme » est à prendre ici dans un sens très général et théorique, en référence à un ordinateur sans aucune limitation de mémoire ou de rapidité. (Pour une introduction mathématique à ces problèmes d'indécidabilité, voir par exemple le remarquable article de Davis. [1])

Le problème de Wang s'est révélé être équivalent à celui de l'existence d'une famille $P_1, ..., P_k$ permettant de paver le plan, mais forcément de manière non périodique.

Et la réponse est donc négative: il existe des familles permettant de paver le plan, mais de manière forcément non périodique; de sorte que le problème de savoir, en général, si une famille pave est *a priori insoluble par ordinateur* (travaux de Berger et Robinson déjà cités).

De même, la question de savoir si une famille de polyominos (voir la fin du § 1) pave le plan est indécidable, c'est-à-dire insoluble par ordinateur (Golomb).

Mais c'est au domaine bien différent de la *physique des métaux* que le sujet de cette note doit une actualité inattendue, et illustre ainsi les rebondissements caractéristiques de la recherche abstraite. Une goutte d'aluminium et de manganèse en proportions convenables se refroidit très brusquement en tombant sur un disque de cuivre à basse température et en rotation rapide. (La rotation a pour effet d'étaler la goutte, et le cuivre, bon conducteur de la chaleur, de la refroidir.) On peut observer le matériau résultant avec un dispositif à rayons X ou un microscope électronique. Et l'un des dogmes les mieux établis de toute la cristallographie s'écroule: le dogme veut qu'une symétrie de rotation des figures observées corresponde toujours à une rotation de

$$1/2 \text{ tour}, \quad \text{ou } 1/3 \text{ tour}, \quad \text{ou } 1/4 \text{ tour}, \quad \text{ou } 1/6 \text{ tour}.$$

Or l'expérience avec l'alliage Al-Mn obtenu montre une symétrie de

1/5 tour !!!

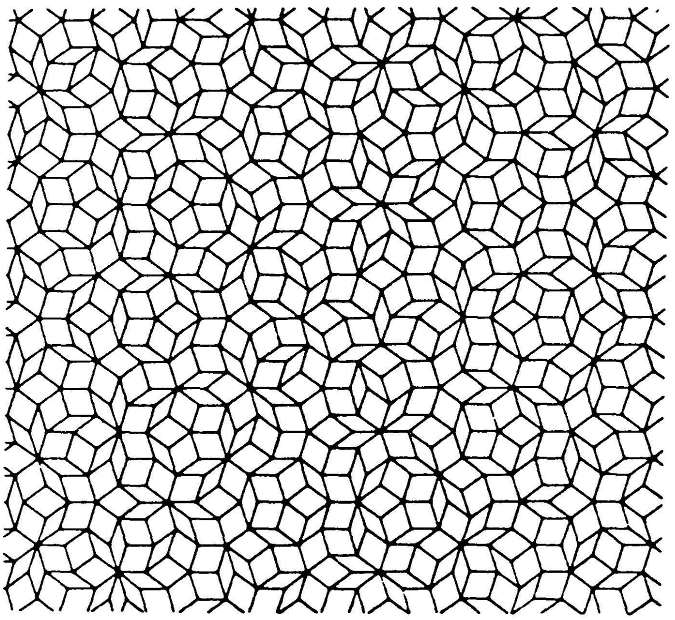
(Schechtman *et al.*, 1984). On a observé depuis d'autres alliages Ni-Cr avec des symétries de 1/12 tour.

La géométrie de l'arrangement des atomes dans ces alliages hérétiques n'est pas encore connue. Mais l'hypothèse la plus plausible semble être celle

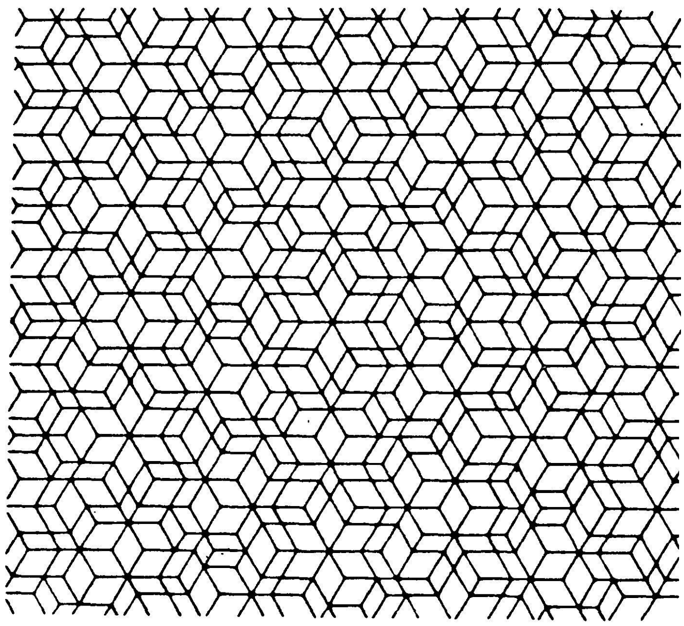
---

[1]) La question originale de Wang est moins ambitieuse, car les briques modèles $P_1, ..., P_k$ sont astreintes à être de forme très particulière: des carrés, tous de même taille, avec diverses saillies et encoches (ou couleurs) sur les côtés. De plus, on impose aux sommets des « carrés » des pavages de constituer un quadrillage régulier du plan. Berger, puis Robinson, montrent que cette question originale est indécidable.

d'un arrangement quasi-périodique dont certaines sections planes reproduisent des pavages de Penrose tels que les deux suivants, repris de Duneau et Katz, 1985. Ce sont des pavages distincts de ceux décrits plus haut, avec respectivement 2 et 3 modèles de briques, où certaines juxtapositions sont exclues par des règles semblables à « les sommets du type T ne se sont pas accolés à des sommets du type H ». Mais ce sont surtout des pavages qui possèdent les propriétés (i) à (iii) énoncées à la fin du § 2.



A. Une section du pavage de dimension trois orthogonale à un axe d'ordre cinq : pavage de Penrose généralisé.

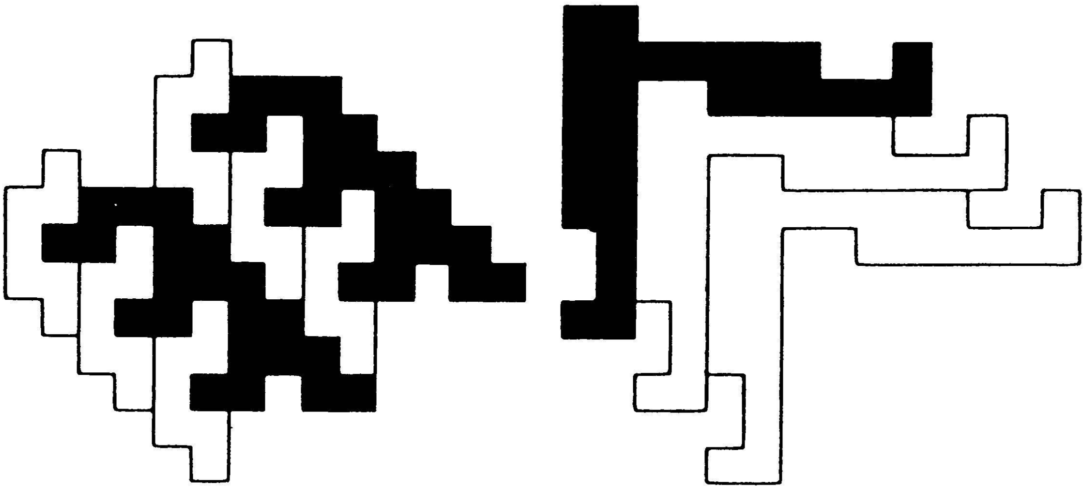


B. Une section du pavage de dimension trois orthogonale à un axe d'ordre trois.

Le lecteur peut observer que la première figure possède des symétries pentagonales *locales*, dont l'abondance est manifeste à l'œil nu.

*
* *

L'étude des pavages est donc d'intérêt physique aussi bien que géométrique, logique ou calculatoire. Il serait bien appauvrissant d'en négliger un quelconque aspect.



Je remercie mes collègues J. P. Eckmann, T. Vust et G. Wanner (Genève), ainsi que N. A'Campo (Bâle) et F. Rothen (Lausanne), pour d'utiles conversations pendant la préparation de ce texte.

RÉFÉRENCES

[1] BERGER, R. *The undecidability of the domino problem.* Mem. Amer. Math. Soc. 66 (1966).

[2] DAVIS, M. Hilbert's tenth problem is unsolvable. *Amer. Monthly 80-3* (1973), 233-269.

[3] DUNEAU, M. and A. KATZ. Quasiperiodic patterns. *Phys. Rev. Lett. 54* (1985), 2688-2691. Voir aussi: Paver l'espace: un jeu mathématique pour les physiciens, *La Recherche 167* (juin 1985), 816-819.

[4] GARDNER, M. More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds and polyhexes. *Sci. Amer. 233* (août et sept. 1975), 112-115 et 180. Voir aussi: On tesselating the plane with convex polygon tiles, *Sci. Amer. 233* (juillet 1975), 112-117, *ainsi que:* SCHATTSCHNEIDER, D. Will it tile? try the Conway criterion!, *Math. Mag. 53-4* (1980), 224-233.

[5] GOLOMB, S. W. Tiling with sets of polyominoes. *J. Combinatorial Theory 9* (1970), 60-71. Voir aussi: Tiling with polyominoes, *ibid. 1* (1966), 280-296.

[6] GRÜNBAUM, B. and G. C. SHEPHARD. Some problems on plane tilings, in *The mathematical Gardner*, édité par D. A. Klarner, Wadsworth intern. (1981), 140-166. Voir aussi: Tiling with congruent tiles, *Bull. Amer. Math. Soc. 3* (1980), 951-973.

[7] KERSHNER, R. B. On paving the plane. *Amer. Monthly 75-8* (1968), 839-844.

[8] LOCHER, J. L. *et al. Le monde de M. C. Escher.* Ed. du Chêne, Paris 1972.

[9] NIVEN, I. Convex polygons that cannot tile the plane. *Amer. Monthly 85-10* (1978), 785-792.

[10] PENROSE, R. The rôle of aesthetics in pure and applied mathematical research, *Bull. Inst. Math. Appl. 10* (1974), 266-271, *et:* Pentaplexity, *Eureka 39* (1978), 16-22. Voir aussi: M. GARDNER, Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles, *Sci. Amer. 236* (janvier 1977), 110-121.

[11] REINHARDT, K. *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone.* Dissertation der Naturwiss. Fakultät, Universität Frankfurt/Main, Borna 1918.

[12] ROBINSON, R. M. Undecidability and non periodicity for tiling of the plane. *Inventiones 12* (1971), 177-209. Voir aussi: *Inventiones 44* (1978), 259-264.

[13] SCHATTSCHNEIDER, D. Tiling the plane with congruent pentagons. *Math. Mag. 51* (1978), 29-44. Voir aussi: In praise of amateurs, in *The mathematical Gardner*, op. cité, 140-166.

[14] SHECHTMAN, D., I. BLECH, D. GRATIAS and J. W. CAHN. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett. 53* (1984), 1951-1953.

[15] WANG, H. Proving theorems by pattern recognition - II. *Bell System Tech. J. 40* (1961), 1-41. Voir aussi: Games, logic and computers, *Sci. Amer. 213* (novembre 1965), 98-106.

QUELQUES RÉFÉRENCES PARUES DEPUIS 1986

DANZER, L. Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals. *Discrete Math. 76* (1989), 1-7.

GRATIAS, D. Les quasi-cristaux. *La Recherche 178* (juin 1986), 788-798.

GRATIAS, D. et M. DUNEAU. *Les quasi-cristaux.* Cours du troisième cycle de la physique en Suisse romande, été 1987.

GRATIAS, D. and L. MICHEL (éditeurs). Internationàl Workshop on aperiodic crystals. *J. de Physique, suppl. au n⁰ 7* (juillet 1986).

GRÜNBAUM, B. and G. C. SHEPHARD. *Tilings and patterns.* Freeman, 1987.

KATZ, A. Theory of matching rules for the 3-dimensional Penrose tilings. *Comm. Math. Phys. 118* (1988), 263-288.

NELSON, D. R. Quasicrystals. *Sci. Amer. 255* (août 1986), 32-41.

OGUEY, G., M. DUNEAU and A. KATZ. A geometrical approach to quasiperiodic tilings. *Comm. Math. Phys. 118* (1988), 99-118.

(Reçu le 7 juillet 1989)

Pierre de la Harpe

Section de Mathématiques
Université de Genève
C.P. 240
CH - 1211 Genève 24 (Suisse)

vide-leer-empty