Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1989)

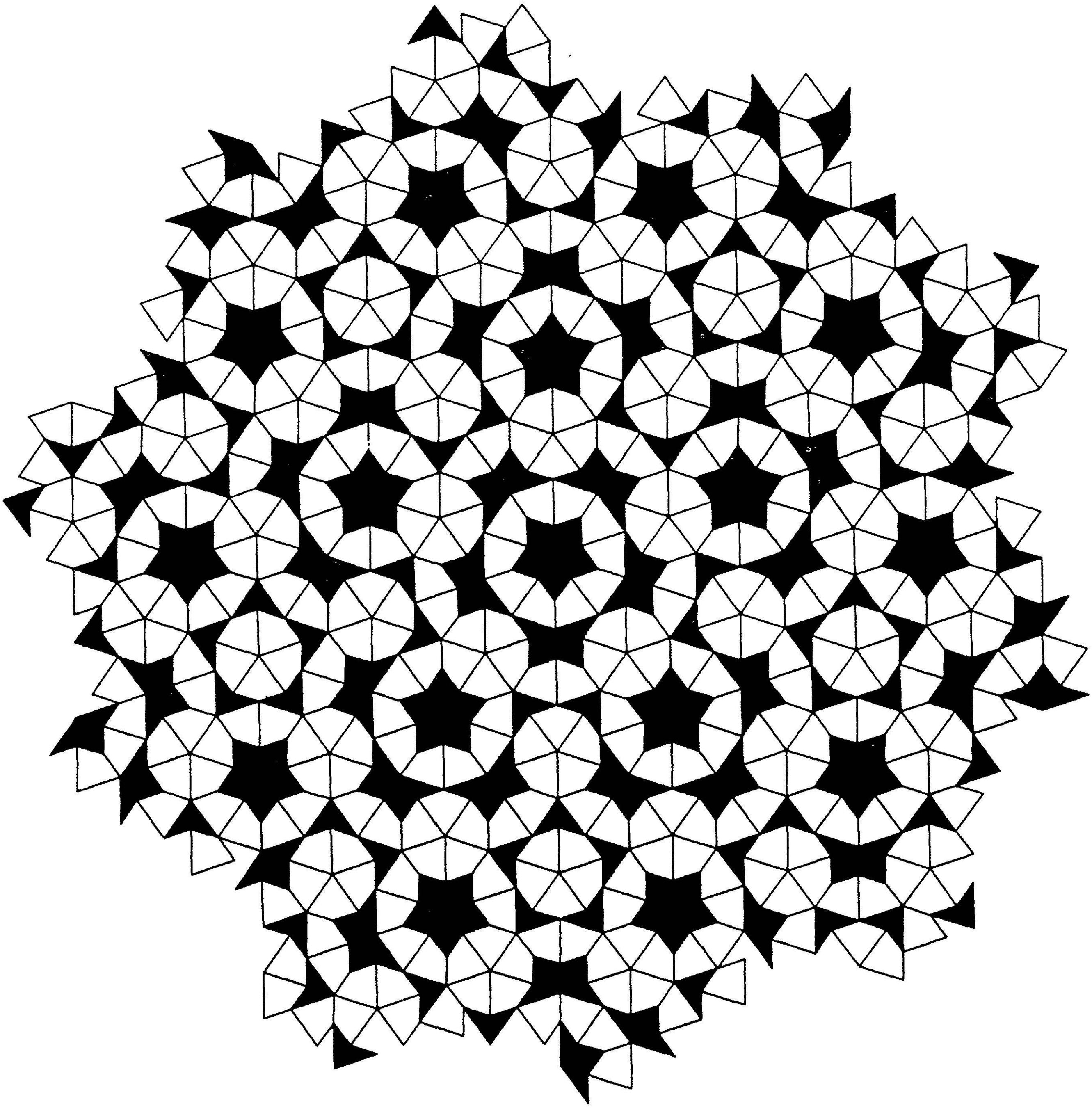
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: QUELQUES PROBLÈMES NON RÉSOLUS EN GÉOMÉTRIE PLANE

Kapitel: 3. Applications

Autor: de la Harpe, P.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57375



3. Applications

L'intérêt des problèmes de pavage dépasse très largement le cadre de la géométrie plane. C'est par exemple des travaux de *logique mathématique* qui, en 1961, ont conduit H. Wang à poser un problème du type de ceux discutés au § 2:

On demande si la première question du § 2 est *décidable*, dans le sens technique de ce terme utilisé par Robinson. En d'autres termes on demande s'il existe un programme d'ordinateur qui, étant donné une famille $P_1, \ldots, P_k$ de polygones plans, indique si oui ou non cette famille pave le plan.

La notion de « programme » est à prendre ici dans un sens très général et théorique, en référence à un ordinateur sans aucune limitation de mémoire ou de rapidité. (Pour une introduction mathématique à ces problèmes d'indécidabilité, voir par exemple le remarquable article de Davis. [1])

Le problème de Wang s'est révélé être équivalent à celui de l'existence d'une famille $P_1, \ldots, P_k$ permettant de paver le plan, mais forcément de manière non périodique.

Et la réponse est donc négative: il existe des familles permettant de paver le plan, mais de manière forcément non périodique; de sorte que le problème de savoir, en général, si une famille pave est *a priori insoluble par ordinateur* (travaux de Berger et Robinson déjà cités).

De même, la question de savoir si une famille de polyominos (voir la fin du § 1) pave le plan est indécidable, c'est-à-dire insoluble par ordinateur (Golomb).

Mais c'est au domaine bien différent de la *physique des métaux* que le sujet de cette note doit une actualité inattendue, et illustre ainsi les rebondissements caractéristiques de la recherche abstraite. Une goutte d'aluminium et de manganèse en proportions convenables se refroidit très brusquement en tombant sur un disque de cuivre à basse température et en rotation rapide. (La rotation a pour effet d'étaler la goutte, et le cuivre, bon conducteur de la chaleur, de la refroidir.) On peut observer le matériau résultant avec un dispositif à rayons X ou un microscope électronique. Et l'un des dogmes les mieux établis de toute la cristallographie s'écroule: le dogme veut qu'une symétrie de rotation des figures observées corresponde toujours à une rotation de

$$1/2 \text{ tour}, \quad \text{ou } 1/3 \text{ tour}, \quad \text{ou } 1/4 \text{ tour}, \quad \text{ou } 1/6 \text{ tour}.$$

Or l'expérience avec l'alliage Al-Mn obtenu montre une symétrie de

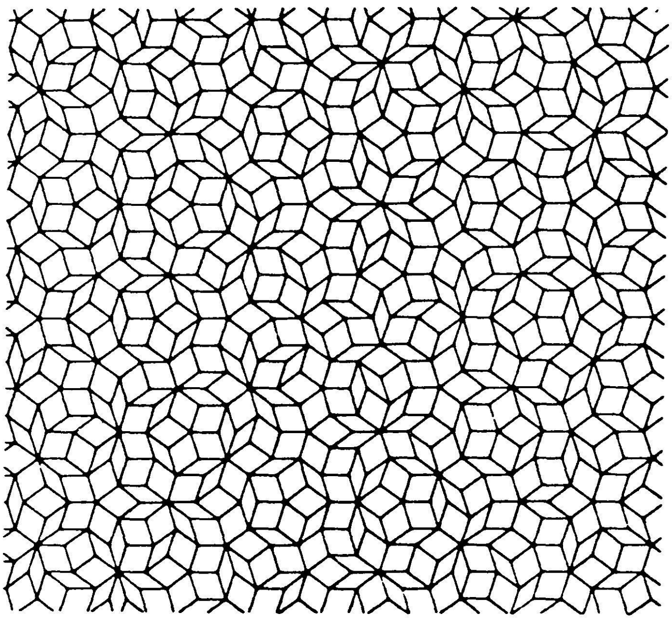
$$1/5 \text{ tour !!!}$$

(Schechtman *et al.*, 1984). On a observé depuis d'autres alliages Ni-Cr avec des symétries de 1/12 tour.

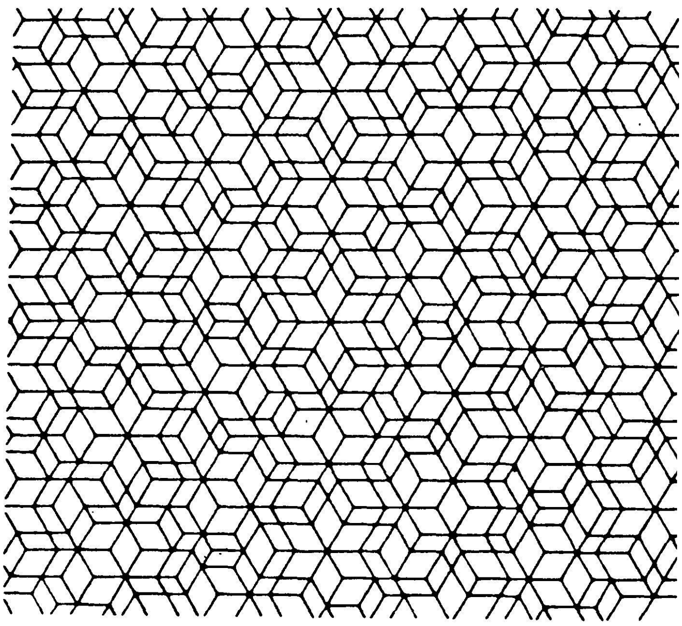
La géométrie de l'arrangement des atomes dans ces alliages hérétiques n'est pas encore connue. Mais l'hypothèse la plus plausible semble être celle

[1]) La question originale de Wang est moins ambitieuse, car les briques modèles $P_1, \ldots, P_k$ sont astreintes à être de forme très particulière: des carrés, tous de même taille, avec diverses saillies et encoches (ou couleurs) sur les côtés. De plus, on impose aux sommets des « carrés » des pavages de constituer un quadrillage régulier du plan. Berger, puis Robinson, montrent que cette question originale est indécidable.

d'un arrangement quasi-périodique dont certaines sections planes reproduisent des pavages de Penrose tels que les deux suivants, repris de Duneau et Katz, 1985. Ce sont des pavages distincts de ceux décrits plus haut, avec respectivement 2 et 3 modèles de briques, où certaines juxtapositions sont exclues par des règles semblables à « les sommets du type T ne se sont pas accolés à des sommets du type H ». Mais ce sont surtout des pavages qui possèdent les propriétés (i) à (iii) énoncées à la fin du § 2.



A. Une section du pavage de dimension trois orthogonale à un axe d'ordre cinq : pavage de Penrose généralisé.

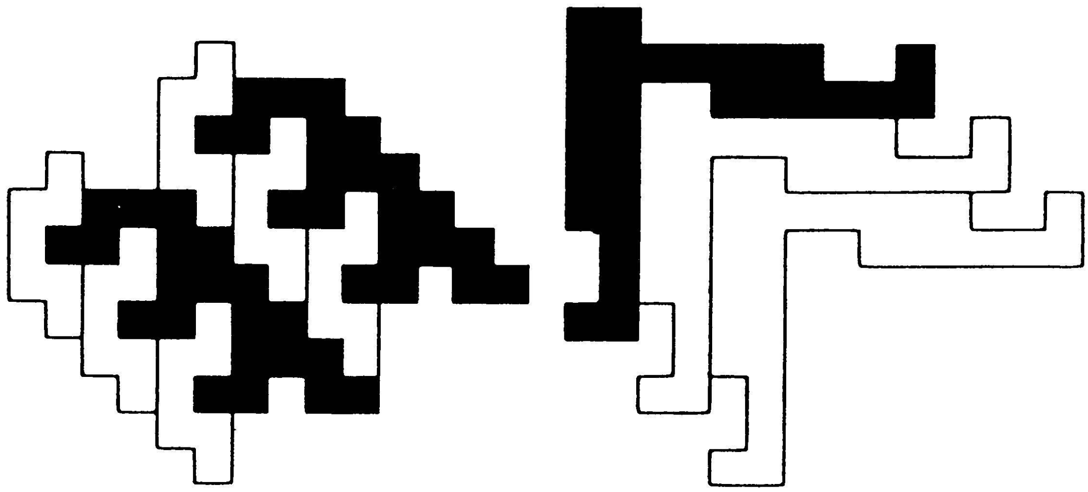


B. Une section du pavage de dimension trois orthogonale à un axe d'ordre trois.

Le lecteur peut observer que la première figure possède des symétries pentagonales *locales*, dont l'abondance est manifeste à l'œil nu.

*
* *

L'étude des pavages est donc d'intérêt physique aussi bien que géométrique, logique ou calculatoire. Il serait bien appauvrissant d'en négliger un quelconque aspect.



Je remercie mes collègues J. P. Eckmann, T. Vust et G. Wanner (Genève), ainsi que N. A'Campo (Bâle) et F. Rothen (Lausanne), pour d'utiles conversations pendant la préparation de ce texte.

RÉFÉRENCES

[1] BERGER, R. *The undecidability of the domino problem.* Mem. Amer. Math. Soc. 66 (1966).

[2] DAVIS, M. Hilbert's tenth problem is unsolvable. *Amer. Monthly 80-3* (1973), 233-269.

[3] DUNEAU, M. and A. KATZ. Quasiperiodic patterns. *Phys. Rev. Lett. 54* (1985), 2688-2691. Voir aussi: Paver l'espace: un jeu mathématique pour les physiciens, *La Recherche 167* (juin 1985), 816-819.

[4] GARDNER, M. More about tiling the plane: the possibilities of polyominoes, polyiamonds and polyhexes. *Sci. Amer. 233* (août et sept. 1975), 112-115 et 180. Voir aussi: On tesselating the plane with convex polygon tiles, *Sci. Amer. 233* (juillet 1975), 112-117, *ainsi que:* SCHATTSCHNEIDER, D. Will it tile? try the Conway criterion!, *Math. Mag. 53-4* (1980), 224-233.

[5] GOLOMB, S. W. Tiling with sets of polyominoes. *J. Combinatorial Theory 9* (1970), 60-71. Voir aussi: Tiling with polyominoes, *ibid. 1* (1966), 280-296.

[6] GRÜNBAUM, B. and G. C. SHEPHARD. Some problems on plane tilings, in *The mathematical Gardner*, édité par D. A. Klarner, Wadsworth intern. (1981), 140-166. Voir aussi: Tiling with congruent tiles, *Bull. Amer. Math. Soc. 3* (1980), 951-973.

[7] KERSHNER, R. B. On paving the plane. *Amer. Monthly 75-8* (1968), 839-844.

[8] LOCHER, J. L. *et al. Le monde de M. C. Escher.* Ed. du Chêne, Paris 1972.

[9] NIVEN, I. Convex polygons that cannot tile the plane. *Amer. Monthly 85-10* (1978), 785-792.