

# Section 2. Proof of Theorem 4

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

To prove CH3, observe that for  $G$  locally finite the homology groups  $H_i(G, \mathbf{Z})$  are all torsion groups for  $i > 0$  as

$$H_i(G, \mathbf{Z}) \cong \varinjlim H_i(G_k, \mathbf{Z}),$$

the limit taken over a family of finite subgroups  $G_k$  of  $G$  such that  $\varinjlim G_k = G$ . Now, by the universal coefficient theorem,

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{Z}}^1(H_1(G, \mathbf{Z}), \hat{\mathbf{Q}}_l) \rightarrow H^2(G, \hat{\mathbf{Q}}_l) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(H_2(G, \mathbf{Z}), \hat{\mathbf{Q}}_l) \rightarrow 0$$

is exact ( $\hat{\mathbf{Q}}_l$  is the quotient field of  $\hat{\mathbf{Z}}_l$ ) so it follows that  $H^2(G, \hat{\mathbf{Q}}_l) = 0$  as  $\hat{\mathbf{Q}}_l$  is both torsion-free and divisible. From the long exact sequence in cohomology it now follows that

$$H^1(G, \hat{\mathbf{Q}}_l/\hat{\mathbf{Z}}_l) \cong H^2(G, \hat{\mathbf{Z}}_l).$$

Finally, as  $\hat{\mathbf{Q}}_l/\mathbf{Z}_l \cong C_{l^\infty}$ , where  $C_{l^\infty}$  is the injective hull of a cyclic  $l$ -group, it follows that

$$\prod_{l \neq p} H^2(G, \hat{\mathbf{Z}}_l) \cong \prod_{l \neq p} H^1(G, C_{l^\infty}) \cong H^1(G, \prod_{l \neq p} C_{l^\infty}) = H^1(G, \bigoplus_{l \neq p} C_{l^\infty}).$$

The last equality holds, as  $G$  is locally finite and  $\bigoplus_{l \neq p} C_{l^\infty}$  is the torsion subgroup of  $\prod_{l \neq p} C_{l^\infty}$ .

SECTION 2. PROOF OF THEOREM 4

Let  $G$  be a given finite group of order  $|G|$  and

$$\rho: G \rightarrow Gl_n(\mathbf{C})$$

a complex representation.

Choose  $q$  to be a power of a prime number  $p$  different from  $l$  such that

$$q \equiv 1 \pmod{|G|}$$

Define

$$\phi: Gl_n(q) \rightarrow \mathbf{C}$$

by

$$\phi(g) = \sum_{i=1}^n e_p(\lambda_i)$$

where  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  are the eigenvalues of  $g$ . As shown by J. A. Green in [4],  $\phi$  is a virtual complex character of  $Gl_n(q)$ .

Furthermore let

$$f: G \rightarrow Gl_n(q)$$

be the mod- $p$  reduction of  $\rho$  to  $Gl_n(q)$ . (It factors through  $Gl_n(q)$ , as all  $|G|$ -roots of unity are contained in the Galois field  $GF(q)$  with  $q$  elements).

Let  $f^*: R_{\mathbb{C}}(Gl_n(q)) \rightarrow R_{\mathbb{C}}(G)$  be a map induced on complex character rings by  $f$ . By inspection

$$f^*(\phi) = \rho.$$

Let  $a = v_l(q-1)$ , where  $v_l$  is the  $l$ -adic valuation and let

$$p^{**}: H^{**}(G, \hat{\mathbf{Z}}_l) \rightarrow H^{**}(G, \mathbf{Z}_{l^a})$$

be the map induced by the projection  $p: \hat{\mathbf{Z}}_l \rightarrow \mathbf{Z}_{l^a}$ . Clearly  $p^{**}$  is injective in positive dimensions, as multiplication by  $l^a$  is zero on  $H^{**}(G, \hat{\mathbf{Z}}_l)$ .

Now the following diagram is commutative

$$\begin{array}{ccc} H^{**}(G, \hat{\mathbf{Z}}_l) & \xrightarrow{p^{**}} & H^{**}(G, \mathbf{Z}_{l^a}) \\ f^{**} \uparrow & & \uparrow f^{**} \\ H^{**}(Gl_n(q), \hat{\mathbf{Z}}_l) & \rightarrow & H^{**}(Gl_n(q), \mathbf{Z}_{l^a}) \\ \downarrow \text{res} & & \downarrow \text{res} \\ H^{**}(T_n(q), \hat{\mathbf{Z}}_l) & \xrightarrow{p^{**}} & H^{**}(T_n(q), \mathbf{Z}_{l^a}) \end{array}$$

where the restriction map on the right is injective as shown in [6].

Thus for  $i = 1, 2$

$$c^{(i)}(d_{p_i}(\rho)) = (p^{**})^{-1} f^{**}(\text{res})^{-1} p^{**}(d_{p_i}(\tau))$$

where  $\tau$  is the restriction of the virtual character  $\phi$  to  $T_n(q)$ . [Note that  $(p^{**})^{-1}$  and  $(\text{res})^{-1}$  both make sense as the above diagram is commutative].

Thus to show equality, it suffices using CH1 in Theorem 2, to show that

$$c^{(1)}(d_{p_1}(\tau)) = c^{(2)}(d_{p_2}(\tau))$$

But  $T_n(q)$  is abelian so  $\tau$  is a direct sum of  $n$  one-dimensional representations. By CH2 of Theorem 2 it suffices to show that for a one dimensional representation

$$\begin{aligned} \varphi: T_n(q) &\rightarrow \mu_\infty, \\ c^{(1)}(d_{p_1}(\varphi)) &= c^{(2)}(d_{p_2}(\varphi)). \end{aligned}$$

But

$$d_{p_i}(\varphi) = e_{p_i}^{-1} \circ \varphi$$

and

$$c^{(i)}(d_{p_i}(\varphi)) = \varphi^* \circ (e_{p_i}^{-1})^* (e_{p_i}^*(u)) = \varphi^*(u).$$

*Remark.* It is necessary to reduce to  $\mathbf{Z}_{l^a}$  coefficients as the restriction map

$$H^*(Gl_n(q), \hat{\mathbf{Z}}_l) \rightarrow H^*(T_n(q), \hat{\mathbf{Z}}_l)$$

is not injective in general.

### SECTION 3. PROOF OF THEOREM 5

CH1 and CH2 clearly follow from resp. CH1 and CH2 in Theorem 2 together with the functoriality of the decomposition map  $d_p$  i.e. the diagram

$$\begin{array}{ccc} R_c(G) & \xrightarrow{f^*} & R_c(H) \\ \downarrow d_p & & \downarrow d_p \\ R_p(G) & \xrightarrow{f^*} & R_p(H) \end{array}$$

is commutative for a group homomorphism  $f: H \rightarrow G$ . To obtain CH3 note that  $d_p(\varphi) = e_p^{-1} \circ \varphi$  so by definition

$$c_1(\varphi) = c_1(d_p(\varphi)) = (e_p^{-1} \circ \varphi)^*(e_p^*(u)) = \varphi^* \circ (e_p^{-1})^* \circ e_p^*(u) = \varphi^*(u).$$

Furthermore let  $\delta$  be the connecting homomorphism obtained from the exact sequence

$$\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Q} \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

As the diagram

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mu_\infty, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim \delta} & H^2(\mu_\infty, \mathbf{Z}) \\ \downarrow \varphi^* & & \downarrow \varphi^* \\ H^1(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) & \xrightarrow{\sim \delta} & H^2(G, \mathbf{Z}) \end{array}$$