

Cantor sets of continued fractions

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

every number of the form $\sum_1^{N+1} a_n/3^n$, $a_n \in \{0, 1, 2\}$ is obtained from the number $\sum_1^N a_n/3^n$ by making a choice between $a_{n+1} = 0$, $a_{n+1} = 1$ and $a_{n+1} = 2$. The crucial point is that the nature of this choice does not depend on the number and does not depend on N . In F_n , the free group with n generators, the choice that one makes to form a word of length $N + 1$ from a word of length N is independent of either the word or N . Accordingly, the graph of F_n is a homogeneous tree (of degree $2n$).

CANTOR SETS OF CONTINUED FRACTIONS

Cantor point sets play an important role in measure theory and in the theory of continued fractions. The Cantor ternary set C is a basic example of an uncountable Borel-measurable set whose measure is zero (see, for example, [5], p. 44 and 63). An important object in the theory of continued fractions is the set $F(n) = \{x \in [0, 1] : x = [0; a_1, a_2, a_3, \dots]$ and $a_i \leq n$ for all $i\}$, that is, the set of continued fractions of bound n (n being any positive integer). The fact that $F(n)$ is a Cantor point set depends on the property that if

$$x = [0; a_1, \dots, a_m, b_{m+1}, b_{m+2}, \dots] \quad \text{and} \quad y = [0; a_1, \dots, a_m, c_{m+1}, c_{m+2}, \dots]$$

are in $F(n)$, then $x < y$ ($x > y$) if $b_{m+1} < c_{m+1}$ and m is odd (m is even). In particular,

$$\min F(n) = [0; n, 1, n, 1, \dots], \quad \max F(n) = [0; 1, n, 1, n, \dots]$$

and $F(n)$ can be obtained by first removing from $(0, 1)$ the open intervals

$$(0, [0; n, 1, n, 1, \dots]) \quad \text{and} \quad ([0; 1, n, 1, n, \dots], 1),$$

then removing the intervals

$$\begin{aligned} &([0; n, n, 1, n, 1, \dots], [0; n-1, 1, n, 1, n, \dots]), \\ &([0; n-1, n, 1, n, 1, \dots], [0; n-2, 1, n, 1, n, \dots]), \\ &\dots, ([0; 2, n, 1, n, 1, \dots], [0; 1, 1, n, 1, n, \dots]), \end{aligned}$$

and so on (see [3], p. 971).

A theorem of M. Hall Jr. says that $F(4) + F(4) + \mathbf{Z} = \mathbf{R}$ ([3], theorem 3.1), which is the analogue of $C + C = [0, 2]$. Hall actually proves more general theorems on the nature of $L(A) + L(B)$ for arbitrary Cantor point sets $L(A)$ and $L(B)$. One of the main applications of Hall's theorem is the result

that the Markoff spectrum contains every real number greater than 6 (cfr. [1], p. 454). The number 6 has successively been replaced by a best possible value, called Hall's ray (≈ 4.5), by employing a refinement of Hall's original theorem (see [2]).

The set $F(2) + F(2)$ has been used in [4] to prove the existence of certain gaps in the lower Markoff spectrum. It is the proof contained there that originally inspired our geometric construction.

REFERENCES

- [1] CUSICK, T. W. The largest gaps in the lower Markoff spectrum. *Duke Math. J.* 41 (1974), 453-463.
- [2] FREIMAN, G. A. Diophantine approximation and the geometry of numbers (Markov's problem), Kalin. Gosud. Univ., Kalinin, 1975.
- [3] HALL, M. Jr. On the sum and product of continued fractions. *Annals of Mathematics*, vol. 48, No. 4 (1947), 966-993.
- [4] KINNEY, J. R. and T. S. PITCHER. On the lower range of Perron's modular function. *Canad. J. Math.* 21 (1969), 808-816.
- [5] ROYDEN, H. L. *Real Analysis*. 2nd edition, 1968, Collier Macmillan Publishers.

(Reçu le 28 mars 1988)

Marco Pavone

Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720 (USA)