Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1989)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER
Autor: Smati, A.
Kapitel: 1. Introduction et présentation des résultats
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57364

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 35 (1989), p. 61-76

RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

par A. SMATI

1. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DES RÉSULTATS

On désigne par φ la fonction arithmétique d'Euler, par γ la constante d'Euler et par a la constante

$$\frac{\zeta(2)\,\zeta(3)}{\zeta(6)} = \prod\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right).$$

Les symboles p et q dénotent toujours des nombres premiers distincts, et $\zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann. Considérons

$$F(x) = \#\,\{n \mid \varphi(n) \leqslant x\} = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} 1\,.$$

Plusieurs auteurs ont étudié cette quantité en utilisant des méthodes élémentaires ou des méthodes non élémentaires. Traditionnellement on appelle méthodes non élémentaires celles dont les arguments utilisent l'analyse complexe ou l'analyse de Fourier. Nous suivons ici cet usage.

P. Erdös et P. Turán [4] furent les premiers à montrer que

$$F(x) = ax + o(x) \qquad (x \to +\infty)\,;$$

leur démonstration, non élémentaire, est basée sur l'existence d'une fonction de distribution pour $n/\varphi(n)$ prouvée par I. J. Schoenberg [10], mais ne donne pas la valeur explicite de a. R. E. Dressler [3] a donné une démonstration, élémentaire, en approchant $\varphi(n)$ par les fonctions

$$\varphi_k(n) = n \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leqslant p_k}} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

où p_k est le $k^{\text{ième}}$ nombre premier. P. T. Bateman [1], utilisant des méthodes d'analyse complexe, a fourni diverses estimations de $F(x)$, dont la plus précise est

$$F(x) = ax + O\Big(x \exp\Big\{-(1-\varepsilon)\left(\frac{1}{2}\log x \log\log x\right)^{1/2}\Big\}\Big)$$

pour tout ε positif, fixé. Enfin J.-L. Nicolas [9] a démontré que

$$F(x) = ax + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

La méthode utilisée est élémentaire et est due essentiellement à Tchebychef. Elle consiste à étudier les sommes

$$\sum_{\varphi(n) \leqslant x} \log \varphi(n) \quad \text{et} \quad \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)}$$

et à les comparer. Dans cet article, on généralise la méthode décrite par J.-L. Nicolas et on démontre le résultat suivant:

THÉORÈME. *On a*

$$F(x) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Notons

$$L(x) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \log^2 \varphi(n).$$

Le passage à l'intégrale de Stieltjes

$$\sum_{\varphi(n) \leqslant x} 1 = \int_{2-}^{x} \frac{d(L(t))}{\log^2 t} + O(1)$$

montre que le théorème découle de la

PROPOSITION. *On a*

$$L(x) = \sum_{\varphi(n) \leqslant x} \log^2 \varphi(n) = ax \log^2 x - 2ax \log x + O(x).$$

Soit

$$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\log (x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

La démonstration de la proposition est organisée en trois étapes. Dans la première on étudie $S(x)$, et dans la deuxième $L(x)$; dans la troisième on exprime $L(x)$ en fonction de $S(x)$ à l'aide d'une convolution.

On conjecture que cette méthode se généralise pour donner le résultat plus précis

$$\sum_{\varphi(n)\leqslant x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right), \qquad \text{pour tout } k > 0 .$$

De façon précise, on conjecture que les mêmes principes appliqués à l'étude des quantités

$$S(x, k-1) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \frac{\log^{k-1}(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \qquad \text{et} \qquad L(x, k) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^k \varphi(n)$$

conduisent au résultat

$$L(x, k) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^k \varphi(n) = ax \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} (\log x)^{k-i} + O_k(x) .$$

Je remercie J.-L. Nicolas de m'avoir fourni le thème de l'étude, G. Robin de m'avoir aidé et M. Balazard pour de multiples remarques, notamment la forme améliorée du lemme F 1). J'exprime mes vifs remerciements au referee pour ses nombreuses et intéressantes suggestions.

2. Lemmes préliminaires

On aura besoin des lemmes suivants, obtenus par voie élémentaire.

Lemme A ([8], [11]). *On a*

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + a\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Lemme B. *On a*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ p\nmid n}} \frac{1}{\varphi(n)} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1)+1} \log x + O(1) .$$

Démonstration. Il est prouvé dans [5] (Lemme 3.2 page 110) le résultat plus général

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ (n,l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} = \prod_{q\nmid l} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(l)}{l} \log x + O_l(1) .$$

En posant $l = p$ dans la preuve de ce résultat, $O_l(1)$ s'explicite alors de la façon suivante