

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 35 (1989)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER
Kapitel: 2. Lemmes préliminaires
Autor: Smati, A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-57364>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

$$\sum_{\varphi(n) \leq x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right), \quad \text{pour tout } k > 0.$$

De façon précise, on conjecture que les mêmes principes appliqués à l'étude des quantités

$$S(x, k-1) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{\log^{k-1}(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \quad \text{et} \quad L(x, k) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^k \varphi(n)$$

conduisent au résultat

$$L(x, k) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^k \varphi(n) = ax \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} (\log x)^{k-i} + O_k(x).$$

Je remercie J.-L. Nicolas de m'avoir fourni le thème de l'étude, G. Robin de m'avoir aidé et M. Balazard pour de multiples remarques, notamment la forme améliorée du lemme F 1). J'exprime mes vifs remerciements au referee pour ses nombreuses et intéressantes suggestions.

2. LEMMES PRÉLIMINAIRES

On aura besoin des lemmes suivants, obtenus par voie élémentaire.

LEMME A ([8], [11]). *On a*

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + a\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

LEMME B. *On a*

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ p \nmid n}} \frac{1}{\varphi(n)} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1) + 1} \log x + O(1).$$

Démonstration. Il est prouvé dans [5] (Lemme 3.2 page 110) le résultat plus général

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, l) = 1}} \frac{1}{\varphi(n)} = \prod_{q \nmid l} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(l)}{l} \log x + O_l(1).$$

En posant $l = p$ dans la preuve de ce résultat, $O_l(1)$ s'explique alors de la façon suivante

$$O_p(1) = \frac{\log p}{p} + \frac{p-1}{p} O(1) = O(1),$$

où la constante impliquée par le symbole O est absolue. Le lemme B en résulte alors en observant que

$$\prod_{q \neq p} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)} \right) \frac{\varphi(p)}{p} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1) + 1}$$

LEMME C [2]. On a

$$\theta^*(x) =: \sum_{p \leq x} \log(p-1) = x + O\left(\frac{x}{\log^H x}\right), \quad \text{pour tout } H > 0.$$

Remarque. Le lemme C est l'une des formes équivalentes du théorème des nombres premiers avec reste. Notre résultat dépend directement des estimations élémentaires d'un tel reste, dont la première fut obtenue par E. Bombieri en 1962.

3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

1^{re} étape.

Etude de la somme
$$S(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

LEMME 1.1. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} = a \sum \frac{\log p}{p(p-1) + 1}.$$

Démonstration. Soit, pour $s > 0$, la série

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s \varphi(n)}.$$

Le théorème du produit eulérien donne

$$F(s) = \prod \left(1 + \frac{1}{p^s(p-1)} \right).$$