Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 35 (1989)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: RÉPARTITION DES VALEURS DE LA FONCTION D'EULER

Kapitel: 2. Lemmes préliminaires

Autor: Smati, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-57364

$$\sum_{\varphi(n)\leqslant x} 1 = ax + O\left(\frac{x}{(\log x)^k}\right), \qquad \text{pour tout } k > 0\,.$$

De façon précise, on conjecture que les mêmes principes appliqués à l'étude des quantités

$$S(x, k-1) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \frac{\log^{k-1}(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \qquad \text{et} \qquad L(x, k) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^k \varphi(n)$$

conduisent au résultat

$$L(x, k) = \sum_{\varphi(n)\leqslant x} \log^k \varphi(n) = ax \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \frac{k!}{(k-i)!} (\log x)^{k-i} + O_k(x)\,.$$

Je remercie J.-L. Nicolas de m'avoir fourni le thème de l'étude, G. Robin de m'avoir aidé et M. Balazard pour de multiples remarques, notamment la forme améliorée du lemme F 1). J'exprime mes vifs remerciements au referee pour ses nombreuses et intéressantes suggestions.

2. Lemmes préliminaires

On aura besoin des lemmes suivants, obtenus par voie élémentaire.

Lemme A ([8], [11]). *On a*

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + a\gamma - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)\log n}{n\varphi(n)} + O\left(\frac{\log x}{x}\right).$$

Lemme B. *On a*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p\nmid n}} \frac{1}{\varphi(n)} = a\frac{(p-1)^2}{p(p-1)+1} \log x + O(1)\,.$$

Démonstration. Il est prouvé dans [5] (Lemme 3.2 page 110) le résultat plus général

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ (n,\,l)=1}} \frac{1}{\varphi(n)} = \prod_{q\nmid l}\left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right)\frac{\varphi(l)}{l} \log x + O_l(1)\,.$$

En posant $l = p$ dans la preuve de ce résultat, $O_l(1)$ s'explicite alors de la façon suivante

$$O_p(1) = \frac{\log p}{p} + \frac{p-1}{p} O(1) = O(1),$$

où la constante impliquée par le symbole O est absolue. Le lemme B en résulte alors en observant que

$$\prod_{q \neq p} \left(1 + \frac{1}{q(q-1)}\right) \frac{\varphi(p)}{p} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1)+1}$$

LEMME C [2]. *On a*

$$\theta^*(x) =: \sum_{p \leqslant x} \log(p-1) = x + O\left(\frac{x}{\log^H x}\right), \quad \textit{pour tout} \quad H > 0.$$

Remarque. Le lemme C est l'une des formes équivalentes du théorème des nombres premiers avec reste. Notre résultat dépend directement des estimations élémentaires d'un tel reste, dont la première fut obtenue par E. Bombieri en 1962.

3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

1re étape.

Etude de la somme $$S(x) = \sum_{n \leqslant x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

LEMME 1.1. *On a*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} = a \sum \frac{\log p}{p(p-1)+1}.$$

Démonstration. Soit, pour $s > 0$, la série

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s \varphi(n)}.$$

Le théorème du produit eulérien donne

$$F(s) = \prod \left(1 + \frac{1}{p^s(p-1)}\right).$$