

# 3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **35 (1989)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$O_p(1) = \frac{\log p}{p} + \frac{p-1}{p} O(1) = O(1),$$

où la constante impliquée par le symbole  $O$  est absolue. Le lemme B en résulte alors en observant que

$$\prod_{q \neq p} \left( 1 + \frac{1}{q(q-1)} \right) \frac{\varphi(p)}{p} = a \frac{(p-1)^2}{p(p-1) + 1}$$

LEMME C [2]. On a

$$\theta^*(x) =: \sum_{p \leq x} \log(p-1) = x + O\left(\frac{x}{\log^H x}\right), \quad \text{pour tout } H > 0.$$

*Remarque.* Le lemme C est l'une des formes équivalentes du théorème des nombres premiers avec reste. Notre résultat dépend directement des estimations élémentaires d'un tel reste, dont la première fut obtenue par E. Bombieri en 1962.

### 3. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION

1<sup>re</sup> étape.

*Etude de la somme* 
$$S(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}.$$

LEMME 1.1. On a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)} = a \sum \frac{\log p}{p(p-1) + 1}.$$

*Démonstration.* Soit, pour  $s > 0$ , la série

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{n^s \varphi(n)}.$$

Le théorème du produit eulérien donne

$$F(s) = \prod \left( 1 + \frac{1}{p^s(p-1)} \right).$$

On a

$$F(1) = \prod \left( 1 + \frac{1}{p(p-1)} \right) = a$$

et

$$F'(1) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n) \log n}{n\varphi(n)}.$$

Le lemme s'obtient alors en prenant la dérivée logarithmique de  $F(s)$  en  $s = 1$ , c'est-à-dire

$$F'(1) = - F(1) \sum \frac{\log p}{p(p-1) + 1}.$$

LEMME 1.2. On a

$$\sum_{n \leq x} \frac{\log n}{\varphi(n)} = \frac{1}{2} a \log^2 x + O(1).$$

*Démonstration.* Soit l'identité

$$\frac{n}{\varphi(n)} = \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)}$$

où  $\mu$  est la fonction de Möbius. On écrit

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{\log n}{\varphi(n)} &= \sum_{n \leq x} \frac{\log n}{n} \sum_{d|n} \frac{\mu^2(d)}{\varphi(d)} = \sum_{d \leq x} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} \sum_{m \leq x/d} \frac{\log (md)}{m} \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} \right) \log x + O(1) \end{aligned}$$

et le lemme s'en déduit en remarquant que

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu^2(d)}{d\varphi(d)} = \prod \left( 1 + \frac{1}{p(p-1)} \right) = a.$$

Le résultat principal est le suivant :

LEMME D. On a

$$S(x) = \frac{1}{2} a \log^2 x + a \left( \gamma - \sum \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p} - \sum \frac{\log p}{p(p(p-1)+1)} - \sum \frac{(p-1) \log (p-1)}{p(p(p-1)+1)} \right) \log x + O(1).$$

*Démonstration.* En utilisant la convolution

$$\log \left( \frac{n}{\varphi(n)} \right) = \sum_{d|n} \rho(d) = \sum_{d|n} \rho \left( \frac{n}{d} \right)$$

avec

$$\rho(n) = \begin{cases} -\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right) & \text{pour } n = p, \\ 0 & \text{pour } n \neq p, \end{cases}$$

on a

$$\begin{aligned} T(x) &= : \sum_{n \leq x} \frac{\log \left( \frac{n}{\varphi(n)} \right)}{\varphi(n)} = \sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} \sum_{d|n} \rho \left( \frac{n}{d} \right) \\ &= - \sum_{d \leq x} \sum_{p \leq x/d} \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{\varphi(pd)}. \end{aligned}$$

En distinguant les cas où  $p | d$  et  $p \nmid d$  et en faisant intervenir la quantité

$$\sum_{d \leq x} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{p \leq x/d \\ (p, d) = 1}} \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p}$$

on obtient

$$\begin{aligned} T(x) &= - \sum_{d \leq x} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{p \leq x/d} \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p} \\ &- \sum_{d \leq x} \frac{1}{\varphi(d)} \sum_{\substack{p \leq x/d \\ (p, d) = 1}} \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p(p-1)} = : U(x) + V(x). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme A on a

$$U(x) = -a \sum \frac{\log \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} \log x + O(1).$$

Quant à  $V(x)$ , on a, par le lemme B,

$$\begin{aligned} V(x) &= - \sum_{p \leq x} \frac{\log \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p(p-1)} \sum_{\substack{d \leq x/p \\ (p,d)=1}} \frac{1}{\varphi(d)} \\ &= a \left( \sum \frac{\log p}{p(p-1)+1} - \sum \frac{\log p}{p(p(p-1)+1)} - \sum \frac{(p-1) \log (p-1)}{p(p(p-1)+1)} \right) \log x \\ &\quad + O(1). \end{aligned}$$

Le lemme D s'en déduit, en observant que

$$S(x) = \log x \sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} - \sum_{n \leq x} \frac{\log n}{\varphi(n)} + \sum_{n \leq x} \frac{\log \left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)}{\varphi(n)}$$

et en appliquant les lemmes A, 1.1; 1.2.

2<sup>e</sup> étape.

Etude de la somme  $L(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \log^2 \varphi(n).$

Le résultat principal est le suivant :

LEMME E. On a

$$\begin{aligned} L(x) &= 2x \sum_{\varphi(d) \leq x} \frac{\log (x/\varphi(d))}{\varphi(d)} - 2x \left( 1 + \gamma - \sum \frac{\log \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} \right) \sum_{\varphi(d) \leq x} \frac{1}{\varphi(d)} \\ &\quad + 2x \sum \frac{\log (p-1)}{p(p-1)} \sum_{\substack{\varphi(d) \leq x \\ p \nmid d}} \frac{1}{\varphi(d)} + 2x \sum \frac{\log p}{p(p-1)^2} \sum_{\substack{\varphi(d) \leq x \\ p \nmid d}} \frac{1}{\varphi(d)} \\ &\quad + O \left( x \sum_{\varphi(d) \leq x} \frac{1}{\varphi(d) \log^2 \left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right)} \right). \end{aligned}$$

La démonstration de ce lemme nécessite les résultats auxiliaires suivants.

LEMME 2.1. On a

$$\log^2 \varphi(n) = \sum_{d|n} \Delta(d) = \sum_{d|n} \Delta\left(\frac{n}{d}\right)$$

où la fonction  $\Delta$  est définie comme suit :

$$\Delta(p) = \log^2(p-1)$$

$$\Delta(pq) = 2 \log(p-1) \log(q-1)$$

$$\Delta(p^\alpha q) = 2 \log p \log(q-1); \alpha \geq 2$$

$$\Delta(p^\alpha) = (2\alpha-3) \log^2 p + 2 \log p \log(p-1); \alpha \geq 2$$

$$\Delta(p^\alpha q^\beta) = 2 \log p \log q, \alpha \geq 2, \beta \geq 2$$

$$\Delta(n) = 0 \text{ si le nombre de facteurs premiers distincts de } n \text{ excède } 2.$$

*Démonstration.* On peut écrire

$$\log \varphi(n) = \sum_{p|n} \log(p-1) + \sum_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \geq 2}} \log p =: X + Y.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \log^2 \varphi(n) &= X^2 + 2XY + Y^2 \quad \text{avec} \\ X^2 &= \sum_{p|n} \log^2(p-1) + \sum_{m=pq|n} 2 \log(p-1) \log(q-1), \\ Y^2 &= \sum_{p|n} \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \\ \alpha, \beta \geq 2 \\ p^\alpha|n, p^\beta|n}} \log^2 p + \sum_{\substack{m=p^\alpha q^\beta|n \\ \alpha, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q, \end{aligned}$$

et

$$2XY = \sum_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \geq 2}} 2 \log(p-1) \log p + \sum_{\substack{m=pq^\alpha|n \\ \alpha \geq 2}} 2 \log(p-1) \log q.$$

La somme de  $\sum_{p|n} \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \\ \alpha, \beta \geq 2}} \log^2 p$  se réécrit, avec  $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$ ,

$$\sum_{\delta \geq 2} \log^2 p \left( \sum_{\substack{(\alpha, \beta) \\ \alpha, \beta \geq 2 \\ \delta = \max\{\alpha, \beta\}}} 1 \right) = \sum_{\delta \geq 2} \log^2 p (2\delta - 3),$$

car les valeurs possibles de  $(\alpha, \beta)$  avec  $\delta = \max\{\alpha, \beta\}$  sont

$(2, \delta), (3, \delta), \dots, (\delta, \delta), (\delta, 2), (\delta, 3), \dots, (\delta, \delta-1)$  et sont donc au nombre de  $2\delta - 3$ .

Finalement

$$\begin{aligned} \log^2 \varphi(n) &= \sum_{p|n} \log^2 (p-1) + \sum_{m=pq|n} 2 \log (p-1) \log (q-1) \\ &+ \sum_{\substack{m=p^\alpha q|n \\ \alpha \geq 2}} 2 \log p \log (q-1) + \sum_{\substack{p^\alpha|n \\ \alpha \geq 2}} \{(2\alpha-3) \log^2 p + 2 \log p \log (p-1)\} \\ &+ \sum_{\substack{m=p^\alpha q^\beta|n \\ \alpha, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q, \end{aligned}$$

comme annoncé.

LEMME 2.2. On a, uniformément pour  $d \geq 1, x \geq 1$ ,

$$\sum_{\varphi(pd) \leq x} \log^2 (p-1) = \frac{x}{\varphi(d)} \log \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right) - \frac{x}{\varphi(d)} + O \left( \frac{x/\varphi(d)}{\log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right)} \right).$$

Démonstration. On a, en distinguant les cas où  $p | d$  et  $p \nmid d$ ,

$$\sum_{\varphi(pd) \leq x} \log^2 (p-1) = \sum_{p \leq x/\varphi(d)} \log^2 (p-1) + \sum_{\substack{x/\varphi(d) < p \leq x/\varphi(d)+1 \\ (p, d)=1}} \log^2 (p-1).$$

Or

$$\sum_{p \leq x/\varphi(d)} \log^2 (p-1) = \int_{2^-}^{x/\varphi(d)} \log (t-1) d(\theta^*(t)), \quad \text{avec} \quad \theta^*(t) = \sum_{p \leq t} \log (p-1).$$

L'intégration par parties et l'usage du lemme C donnent alors

$$\sum_{p \leq x/\varphi(d)} \log^2 (p-1) = \frac{x}{\varphi(d)} \log \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right) - \frac{x}{\varphi(d)} + O \left( \frac{x/\varphi(d)}{\log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right)} \right),$$

le lemme suit, en remarquant que

$$\sum_{\substack{x/\varphi(d) < p \leq x/\varphi(d)+1 \\ (p, d)=1}} \log^2 (p-1) \leq \log^2 \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right).$$

LEMME 2.3. On a, uniformément pour  $d \geq 1, x \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\varphi(pqd) \leq x \\ p < q}} 2 \log (p-1) \log (q-1) &= \frac{x}{\varphi(d)} \log \frac{x}{\varphi(d)} + 2 \left( \sum \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{p} \right)}{p} - 2\gamma \right. \\ &\left. - 2 \sum \frac{\log p}{p(p-1)} - 1 \right) \cdot \frac{x}{\varphi(d)} + \frac{2x}{\varphi(d)} \sum_{(p, d)=1} \frac{\log (p-1)}{p(p-1)} + O \left( \frac{x/\varphi(d)}{\log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right)} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Soit  $y = x/\varphi(d)$ . Dans les quelques lignes qui suivent on écrira, pour simplifier,  $\Sigma$  au lieu de  $\Sigma 2 \log(p-1) \log(q-1)$ , et l'on conviendra sans l'écrire que  $p < q$ .

Soit la somme  $\sum_{\varphi(pqd) \leq x}$ . En distinguant les cas  $pq \mid d$  et  $pq \nmid d$  et en observant que si  $d' \mid d$  alors  $\varphi(dd') = d'\varphi(d)$ , on obtient

$$\sum_{\varphi(pqd) \leq x} = \sum_{pq \leq y} - \sum_{\substack{pq \leq y \\ pq \nmid d}} + \sum_{\substack{\varphi(pqd) \leq x \\ pq \nmid d}}.$$

En distinguant les cas  $p \mid d$  et  $q \nmid d$ ;  $p \nmid d$  et  $q \mid d$ ;  $p \nmid d$  et  $q \nmid d$  on obtient

$$\sum_{\substack{pq \leq y \\ pq \nmid d}} = \sum_{\substack{pq \leq y \\ (p, d) = 1}} + \sum_{\substack{pq \leq y \\ (q, d) = 1, p \nmid d}}$$

et

$$\sum_{\substack{\varphi(pqd) \leq x \\ pq \nmid d}} = \sum_{\substack{(p-1)q \leq y \\ (p, d) = 1}} + \sum_{\substack{p(q-1) \leq y \\ p \mid d, (q, d) = 1}} - \sum_{\substack{(p-1)q \leq y \\ (p, d) = 1, (q, d) = 1}} + \sum_{\substack{(p-1)(q-1) \leq y \\ (p, d) = 1, (q, d) = 1}}.$$

En rassemblant ces sommes, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi(pqd) \leq x} &= \sum_{pq \leq y} + \left( \sum_{\substack{(p-1)q \leq y \\ (p, d) = 1}} - \sum_{\substack{pq \leq y \\ (p, d) = 1}} \right) + \left( \sum_{\substack{p(q-1) \leq y \\ p \mid d, (q, d) = 1}} - \sum_{\substack{pq \leq y \\ p \mid d, (q, d) = 1}} \right) \\ &+ \left( \sum_{\substack{(p-1)(q-1) \leq y \\ (p, d) = 1, (q, d) = 1}} - \sum_{\substack{(p-1)q \leq y \\ (p, d) = 1, (q, d) = 1}} \right) =: A_1 + A_2 + A_3 + A_4. \end{aligned}$$

La somme  $A_1$  s'écrit

$$\begin{aligned} 2 \sum_{p \leq \sqrt{y}} \log(p-1) \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p} \\ q \leq p}} \log(q-1) - \sum_{p \leq \sqrt{y}} \log(p-1) \sum_{q \leq \sqrt{y}} \log(q-1) \\ - \sum_{p \leq \sqrt{y}} 2 \log^2(p-1). \end{aligned}$$

Les deux premières sommes s'écrivent

$$\begin{aligned} 2 \sum_{p \leq \sqrt{y}} \theta^* \left( \frac{y}{p} \right) \log(p-1) - \left( \theta^*(\sqrt{y}) \right)^2 = 2y \sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log(p-1)}{p} \\ - y + O \left( \frac{y}{\log^2(2y)} \right) \end{aligned}$$

par application du lemme C. Mais, on a



$$\sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log(p-1)}{p} = \sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log p}{p} + \sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p}.$$

L'estimation classique (cf. [7] § 55)

$$\sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log p}{p} = \frac{1}{2} \log y + \left(-\gamma - \sum \frac{\log p}{p(p-1)}\right) + O\left(\frac{1}{\log^2(2y)}\right)$$

et les estimations

$$\sum_{p \leq \sqrt{y}} \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} = \sum \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} + O\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)$$

et

$$\sum_{p \leq \sqrt{y}} \log^2(p-1) \ll \frac{y}{\log^2(2y)}$$

donnent alors

$$A_1 = y \log y + \left(2 \sum \frac{\log\left(1 - \frac{1}{p}\right)}{p} - 2\gamma - 1 - 2 \sum \frac{\log p}{p(p-1)}\right)y + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right).$$

Passons à  $A_2$ , qui se réécrit

$$A_2 = 2 \sum_{\substack{p-1 \leq \sqrt{y} \\ (p, d)=1}} \log(p-1)\theta^*\left(\frac{y}{p-1}\right) - \sum_{\substack{p-1 \leq \sqrt{y} \\ (p, d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p) - \left(2 \sum_{\substack{p \leq \sqrt{y} \\ (p, d)=1}} \log(p-1)\theta^*\left(\frac{y}{p}\right) - \sum_{\substack{p \leq \sqrt{y} \\ (p, d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p)\right).$$

On a

$$\sum_{\substack{p-1 \leq \sqrt{y} \\ (p, d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p) - \sum_{\substack{p \leq \sqrt{y} \\ (p, d)=1}} \log(p-1)\theta^*(p) \ll \sqrt{y} \log \sqrt{y}.$$

Quant aux autres termes, on les estime à l'aide du lemme C; on obtient

$$A_2 = 2y \sum_{(p,d)=1} \frac{\log(p-1)}{p(p-1)} + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right).$$

Finalement, un calcul semblable donne

$$A_3 = 2 \sum_{\substack{p \leq \sqrt{y} \\ p|d}} \log(p-1) \sum_{\substack{\frac{y}{p} < q \leq \frac{y}{p} + 1 \\ (q,d)=1}} \log(q-1) = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right)$$

et

$$A_4 = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right),$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 2.4. On a, uniformément pour  $d \geq 1$ ,  $x \geq 1$ ,

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} 2 \log p \log(q-1) = 2 \frac{x}{\varphi(d)} \sum \frac{\log p}{p(p-1)} + 2 \frac{x}{\varphi(d)} \sum_{(p,d)=1} \frac{\log p}{p(p-1)^2} + O\left(\frac{x/\varphi(d)}{\log^2\left(\frac{2x}{\varphi(d)}\right)}\right).$$

*Démonstration.* Comme précédemment, on omet l'écriture de  $2 \log p \log(q-1)$  dans les quelques lignes qui suivent, où l'on conviendra, également sans l'écrire, que  $p \neq q$  et que  $\alpha \geq 2$ .

En distinguant comme précédemment les cas où  $p|d$  et  $p \nmid d$  puis  $q|d$  et  $q \nmid d$ , on obtient, en posant  $y = \frac{x}{\varphi(d)}$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\varphi(p^\alpha q d) \leq x} &= \sum_{p^\alpha q \leq y} + \left( \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1)q \leq y \\ (p,d)=1}} - \sum_{\substack{p^\alpha q \leq y \\ (p,d)=1}} \right) + \left( \sum_{\substack{p^\alpha(q-1) \leq y \\ p|d, (q,d)=1}} - \sum_{\substack{p^\alpha q \leq y \\ p|d, (q,d)=1}} \right) \\ &+ \left( \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1)(q-1) \leq y \\ (p,d)=1, (q,d)=1}} - \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1)q \leq y \\ (p,d)=1, (q,d)=1}} \right) =: B_1 + B_2 + B_3 + B_4. \end{aligned}$$

On a, avec le lemme C,

$$B_1 = 2 \sum_{p^\alpha \leq \sqrt{y}} \log p \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p^\alpha} \\ q \neq p}} \log(q-1)$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \sum_{p^\alpha \leq y} \log p \left\{ \frac{y}{p^\alpha} + O\left(\frac{y}{p^\alpha \log^2\left(\frac{2y}{p^\alpha}\right)}\right) + O(\log(p-1)) \right\} \\
 &= 2y \sum \frac{\log p}{p(p-1)} + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right).
 \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}
 B_2 &= 2 \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1) \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log p \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p^{\alpha-1}(p-1)} \\ q \neq p}} \log(q-1) - 2 \sum_{\substack{p^\alpha \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log p \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p^\alpha} \\ q \neq p}} \log(q-1) \\
 &= 2 \sum_{\substack{p^\alpha \leq \sqrt{y} \\ (p,d)=1, p|d}} \log p \left\{ \sum_{q \leq \frac{y}{p^{\alpha-1}(p-1)}} \log(q-1) - \sum_{q \leq \frac{y}{p^\alpha}} \log(q-1) + O(\log(p-1)) \right\} \\
 &\quad + 2 \sum_{\substack{p^{\alpha-1}(p-1) \leq \sqrt{y} \\ p^\alpha > \sqrt{y} \\ (p,d)=1}} \log p \sum_{\substack{q \leq \frac{y}{p^{\alpha-1}(p-1)} \\ q \neq p}} \log(q-1) \\
 &= 2y \sum_{(p,d)=1} \frac{\log p}{p(p-1)^2} + O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right),
 \end{aligned}$$

avec trois applications du lemme C pour la dernière égalité. Finalement,

$$\begin{aligned}
 B_3 &= 2 \sum_{p^\alpha \leq \sqrt{y}} \log p \left\{ \sum_{\substack{q \leq y/p^\alpha + 1 \\ q \neq p, (q,d)=1}} \log(q-1) - \sum_{\substack{q \leq y/p^\alpha \\ q \neq p, (q,d)=1}} \log(q-1) \right\} \\
 &= O(\sqrt[4]{y} \log y) = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right)
 \end{aligned}$$

et de la même façon,

$$B_4 = O\left(\frac{y}{\log^2(2y)}\right),$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

LEMME 2.5. On a, uniformément pour  $d \geq 1, x \geq 1$ ,

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} \{(2\alpha-3) \log^2 p + 2 \log p \log(p-1)\} = O\left(\sqrt{x/\varphi(d)} \log^2\left(\frac{x}{\varphi(d)}\right)\right).$$

*Démonstration.* En observant que, d'une part  $\varphi(p^\alpha d) \geq \frac{1}{2} p^\alpha \varphi(d)$  et d'autre part  $\alpha \leq \log \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right) / \log 2$  si  $\frac{1}{2} p^\alpha \varphi(d) \leq x$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} \left( (2\alpha - 3) \log^2 p + 2 \log p \log(p-1) \right) \\ & \leq \sum_{\substack{p^\alpha \leq \frac{2x}{\varphi(d)} \\ \alpha \geq 2}} \left( (2\alpha - 3) \log^2 p + 2 \log p \log(p-1) \right) \\ & \ll \log \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right) \sum_{\substack{p^\alpha \leq \frac{2x}{\varphi(d)} \\ \alpha \geq 2}} \log^2 p \ll \sqrt{x/\varphi(d)} \log^2 \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right). \end{aligned}$$

LEMME 2.6. On a, uniformément pour  $d \geq 1, x \geq 1$

$$\sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q^\beta d) \leq x \\ \alpha \geq 2, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q = O \left( \sqrt{x/\varphi(d)} \log \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right) \right).$$

*Démonstration.* De  $\varphi(p^\alpha q^\beta d) \geq (p-1)^\alpha (q-1)^\beta \varphi(d)$ , on déduit que

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q^\beta d) \leq x \\ \alpha \geq 2, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q \ll \sum_{\substack{(p-1)^\alpha (q-1)^\beta \leq x/\varphi(d) \\ \alpha \geq 2, \beta \geq 2}} \log p \log q \ll \\ & \sum_{\substack{(p-1)^\alpha \leq \sqrt{x/\varphi(d)} \\ \alpha \geq 2}} \log p \sum_{\substack{(q-1)^\beta \leq \frac{x}{(p-1)^\alpha \varphi(d)} \\ \beta \geq 2}} \log q \ll \sqrt{x/\varphi(d)} \sum_{\substack{(p-1)^\alpha \leq \sqrt{x/\varphi(d)} \\ \alpha \geq 2}} \frac{\log p}{(p-1)^{\alpha/2}} \\ & \ll \sqrt{x/\varphi(d)} \log \left( \frac{x}{\varphi(d)} \right). \end{aligned}$$

*Démonstration du lemme E.* D'après le lemme 2.1, on peut écrire

$$L(x) = \sum_{\varphi(n) \leq x} \sum_{d|n} \Delta \left( \frac{n}{d} \right) = \sum_{\varphi(d) \leq x} \sum_{\substack{d' \\ \varphi(dd') \leq x}} \Delta(d').$$

Or

$$\sum_{\varphi(dd') \leq x} \Delta(d') = \sum_{\varphi(pd) \leq x} \log^2(p-1) + \sum_{\varphi(pqd) \leq x} 2 \log(p-1) \log(q-1)$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} 2 \log p \log (q-1) + \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha d) \leq x \\ \alpha \geq 2}} \{(2\alpha-3) \log^2 p + 2 \log p \log (p-1)\} \\
 & + \sum_{\substack{\varphi(p^\alpha q^\beta d) \leq x \\ \alpha \geq 2, \beta \geq 2}} 2 \log p \log q
 \end{aligned}$$

L'application des lemmes 2.2 à 2.6 termine la démonstration.

3<sup>e</sup> étape.

LEMME F. On a

$$1) \sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leq x}} \frac{\log (x/\varphi(n))}{\varphi(n)} = O(1).$$

$$2) \sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{1}{\varphi(n) \log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(n)} \right)} = O(1).$$

$$3) \sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = a \log x + O(1).$$

*Démonstration.*

1) Pour  $y \geq 1$ ,  $\log y \leq y$ , donc

$$\sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leq x}} \frac{\log (x/\varphi(n))}{\varphi(n)} \leq x \sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leq x}} \frac{1}{(\varphi(n))^2} = x O\left(\frac{1}{x}\right) = O(1) \quad (\text{cf. [9]}).$$

2) Le passage à l'intégrale de Stieltjes et l'intégration par parties donnent :

$$\begin{aligned}
 \sum_{\varphi(d) \leq x} \frac{1}{\varphi(d) \log^2 \left( \frac{2x}{\varphi(d)} \right)} &= \int_{1^-}^x \frac{d(F(t))}{t \log^2 \left( \frac{2x}{t} \right)} = \frac{F(x)}{x \log^2 2} \\
 &+ \int_1^x \frac{\left( \log \left( \frac{2x}{t} \right) - 2 \right) F(t)}{t^2 \log^3 \left( \frac{2x}{t} \right)} dt = O(1)
 \end{aligned}$$

car  $F(x) = O(x)$ .

3) (cf. [9]).

La proposition suit alors de la remarque

$$\sum_{\varphi(n) \leq x} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)} = S(x) + \sum_{\substack{n > x \\ \varphi(n) \leq x}} \frac{\log(x/\varphi(n))}{\varphi(n)}$$

et des lemmes E, D, F, B et H.

### RÉFÉRENCES

- [1] BATEMAN, P. T. The distribution of values of Euler's function. *Acta Arith.* 21 (1972), 329-345.
- [2] BOMBIERI, E. Sulle formule di A. Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel « Primzahlsatz ». *Riv. Mat. Univ. Parma* 3 (1962), 393-440.
- [3] DRESSLER, R. E. A density which counts multiplicity. *Pacific J. Math.* 34 (1970), 371-378.
- [4] ERDÖS, P. Some remarks on Euler's  $\varphi$ -function and some related problems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 51 (1945), 540-544.
- [5] HALBERSTAM, H. and H.-E. RICHERT. *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.
- [6] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *A introduction to the theory of numbers*. 5th ed. Oxford Univ. Press, London (1979).
- [7] LANDAU, E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Chelsea, 3<sup>e</sup> ed. 1974.
- [8] ——— Über die zahlentheoretische Funktion  $\varphi(n)$  und ihre Bedeutung zum Goldbachschen Satz. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl.* (1900), 181-184.
- [9] NICOLAS, J.-L. Distribution des valeurs de la fonction d'Euler. *L'Enseignement Math.* 30 (1984), 331-338.
- [10] SCHOENBERG, I. J. Über die asymptotische Verteilung reeler Zahlen mod 1. *Math. Z.* 28 (1928), 171-199.
- [11] SITARAMACHANDRARAO, R. On an error term of Landau. *Indian J. pure appl. Math.* 13 (1982), 882-885.

(Reçu le 10 novembre 1988)

Abdelhakim Smati

Département de Mathématiques  
 Université de Limoges  
 123, avenue Albert-Thomas  
 F-87060 Limoges Cedex (France)