2. Etude des bicarrés

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

2. Etude des bicarrés

L'encadrement $9 \leqslant v(4) \leqslant 10$ est dû à W. Hunter ([3]); nous allons en donner une présentation différente. Comme, modulo 16, $x^4 \equiv 0$ ou 1, tout entier de la forme $16n + 8$ nécessite au moins 8 bicarrés, tous de même signe; comme 24 n'est pas somme de huit bicarrés, $v(4) \geqslant 9$. Le même raisonnement ([8]) s'applique à toute puissance de 2: $v(2^n) \geqslant 2^{n+1} + 1, n \geqslant 2$. L'inégalité $v(4) \leqslant 10$ est plus délicate.

Ainsi on a:

$$(x+8)^4 - (x-8)^4 + (2x-1)^4 - (2x+1)^4 = 4080x . \tag{5}$$

Comme $4080 = 16 \times 3 \times 5 \times 17$ et que modulo 3, modulo 5 et modulo 17 tout entier est somme algébrique d'au plus trois bicarrés, on a le

LEMME. *Tout entier de l'une des formes suivantes:* $16m$, $16m \pm k$, $k \in \{1,2,3\}$ *est somme algébrique d'au plus 7 bicarrés.*

Nous allons maintenant utiliser une identité (2) due à W. Hunter, avec $h = 7$, $\max d^\circ P_i = 2$ et $Ax + B = 48x + 4$, dont nous donnons la genèse. Soit P un polynôme à valeurs entières:

$$(P+1)^4 + (P-1)^4 - 2P^4 = 12P^2 + 2 .$$

Si P est de degré pair, le degré du second membre sera multiple de 4 et on peut chercher des polynômes à valeurs entières Q_i tels que

$$12P^2 + 2 - \sum_{i=1}^{t} Q_i^4 = Ax + B ,$$

soit si $A \neq 0$ une identité à $t + 4$ termes. Nous prenons ici $P(x) = 2x^2 + bx + c$ et $Q_i(x) = 2x + \alpha_i$, $i = 1,2,3$, choix qui donne les relations

$$\begin{cases} 32\Sigma\alpha_i = 48b \\ 24\Sigma\alpha_i^2 = 12(b^2+4c) . \end{cases}$$

Il est clair que b doit être pair et en simplifiant les deux relations par 32 et par 24, comme $\Sigma\alpha_i$ et $\Sigma\alpha_i^2$ ont même parité, b doit être multiple de 4. Un changement de variables donne $b = 0$ donc de $\alpha_3 = -(\alpha_1+\alpha_2)$ résulte $c = \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2^2$ et le second membre est

$$Ax + B = 24\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)x + 10(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)^2 + 2 .$$

Le coefficient A est toujours un multiple de 48; le coefficient B ne peut être que 2 ou $\pm$ 4 modulo 16, ce dernier cas étant intéressant: ainsi, en choisissant $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 1)$

$$\begin{aligned}(2x^2+4)^4 + (2x^2+2)^4 - 2(2x^2+3)^4 - (2x-2)^4 \\ - 2(2x+1)^4 = 48(x+2) - 4\,.\end{aligned} \tag{6}$$

Cette identité permet de montrer

LEMME. *Tous les entiers de la forme* $16m \pm k$, $k \in \{4,5\}$ *sont somme d'au plus 8 bicarrés. Ceux de la forme* $16m \pm 6$ *sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir la première partie du lemme, il suffit d'ajouter ou de retrancher à $48X \pm 4$ l'un des trois nombres 1^4, 2^4 ou 3^4. Pour la seconde, il suffit d'utiliser la première partie et 1^4. Ces deux lemmes donnent la

PROPOSITION. *Parmi 16 entiers consécutifs, 13 au moins sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir $v(4) \leqslant 10$, les nombres de la forme $16m \pm 7$ ne posent pas de problème. Pour ceux de la forme $16m + 8$, W. Hunter fournit des identités à dix termes:

$$\begin{aligned}24(y+10319691) = (y^2+625)^4 + (y^2+603)^4 - (y^2+626)^4 \\ - (y^2+602)^4 + (4y+11)^4 + (2y-87)^4 + (y+125)^4 + (y-9)^4 \\ + (y-41)^4 + (y-83)^4\end{aligned} \tag{7}$$

et

$$\begin{aligned}24(y+120858614086) - 8 = (y^2+39873)^4 + (y^2+39851)^4 \\ - (y^2+39874)^4 - (y^2+39850)^4 + (4y+11)^4 + (2y-87)^4 \\ + (y+1017)^4 + (y+883)^4 + (y-933)^4 + (y-975)^4\end{aligned} \tag{8}$$

qui donne le théorème $v(4) \leqslant 10$. L'origine de ces identités est analogue, bien que plus compliquée, à celle de (6). On considère, h et k étant entiers, $\Delta_{h,k}(P) = (P+h+k)^4 - (P+h)^4 - (P+k)^4 + P^4$ du second degré en P; il faut choisir h et k et les polynômes Q_i de sorte que

$$\Delta_{h,k}(P) - \sum_{i=1}^{6} Q_i^4 = Ax + B\,.$$

Remarquons que, dans l'identité (8), si y est pair tous les polynômes ayant le signe + sont impairs (il y en a 8) et tous les polynômes ayant le signe moins sont pairs: les nombres représentés sont donc de la forme $16m + 8$. Pour pouvoir éventuellement montrer que $v(4) = 9$, ou au moins que les nombres $16m \pm 7$ sont somme d'au plus neuf bicarrés, il faut obtenir des identités où le nombre de polynômes précédés du signe $+$ et celui des polynômes précédés du signe $-$ sont très différents et il faut que beaucoup des premiers prennent des valeurs impaires, tous les autres prenant des valeurs paires. Ainsi on peut espérer pour B un résidu modulo 16 le plus élevé possible par rapport au nombre total h de polynômes. Ainsi on pourrait envisager de chercher une identité de la forme

$$(P+\alpha)^4 - P^4 + \sum_{i=1}^{s} Q_i^4 = Ax + B\,, \tag{9}$$

avec α impair, P prenant des valeurs paires et les Q_i des valeurs impaires. Alors on aurait $B \equiv s + 1$ (16) ce qui fournirait des identités utilisables pour les nombres de la forme $16m \pm 7$ et ± 8. Cependant, comme $d^{\circ}((P+\alpha)^4 - P^4) \equiv 0(3)$, il faut que le degré de P soit un multiple de 4 et que l'un des Q_i au moins soit de degré multiple de 3.

On peut obtenir d'autres identités avec des bicarrés; par exemple

$$\sum_{i=1}^{4} (a_i x + 1)^4 - (a_i x - 1)^4 = 8\,(\sum_i a_i)x \tag{10}$$

si $\sum_{i=1}^{4} a_i^3 = 0$, d'où des identités pour $48x$ avec les suites $(3,4,5,-6)$, $(10,9,-12,-1)$, $(27,16,-19,-18)$... (noter que $\Sigma a_i \equiv \Sigma a_i^3 (6)$ est toujours divisible par 6).

D'autres identités à 4, 5 ou 6 termes peuvent s'obtenir facilement à l'aide de solutions triviales ou non triviales des équations $\sum_{i=1}^{s} X_i^4 = \sum_{j=1}^{t} Y_j^4$ où les couples (s, t) sont $(2,2)$, $(3,2)$ ou $(3,3)$.

3. Identités et problèmes de Tarry-Escott

L'identité (3), de degré 5, est le cas particulier d'identités beaucoup plus générales. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{s} (x + a_i)^k - \sum_{j=1}^{s} (x + b_j)^k = Ax + B \quad \text{avec} \quad A \neq 0 \tag{11}$$