

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 37 (1991)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** LE PROBLÈME FACILE DE WARING  
**Autor:** Revoy, Philippe  
**Kapitel:** 2. Etude des bicarrés  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-58740>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2. ETUDE DES BICARRÉS

L'encadrement  $9 \leq \nu(4) \leq 10$  est dû à W. Hunter ([3]); nous allons en donner une présentation différente. Comme, modulo 16,  $x^4 \equiv 0$  ou 1, tout entier de la forme  $16n + 8$  nécessite au moins 8 bicarrés, tous de même signe; comme 24 n'est pas somme de huit bicarrés,  $\nu(4) \geq 9$ . Le même raisonnement ([8]) s'applique à toute puissance de 2:  $\nu(2^n) \geq 2^{n+1} + 1$ ,  $n \geq 2$ . L'inégalité  $\nu(4) \leq 10$  est plus délicate.

Ainsi on a:

$$(5) \quad (x+8)^4 - (x-8)^4 + (2x-1)^4 - (2x+1)^4 = 4080x.$$

Comme  $4080 = 16 \times 3 \times 5 \times 17$  et que modulo 3, modulo 5 et modulo 17 tout entier est somme algébrique d'au plus trois bicarrés, on a le

LEMME. *Tout entier de l'une des formes suivantes:  $16m$ ,  $16m \pm k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$  est somme algébrique d'au plus 7 bicarrés.*

Nous allons maintenant utiliser une identité (2) due à W. Hunter, avec  $h = 7$ ,  $\max d^\circ P_i = 2$  et  $Ax + B = 48x + 4$ , dont nous donnons la genèse. Soit  $P$  un polynôme à valeurs entières:

$$(P+1)^4 + (P-1)^4 - 2P^4 = 12P^2 + 2.$$

Si  $P$  est de degré pair, le degré du second membre sera multiple de 4 et on peut chercher des polynômes à valeurs entières  $Q_i$  tels que

$$12P^2 + 2 - \sum_{i=1}^t Q_i^4 = Ax + B,$$

soit si  $A \neq 0$  une identité à  $t+4$  termes. Nous prenons ici  $P(x) = 2x^2 + bx + c$  et  $Q_i(x) = 2x + \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , choix qui donne les relations

$$\begin{cases} 32 \sum \alpha_i = 48b \\ 24 \sum \alpha_i^2 = 12(b^2 + 4c). \end{cases}$$

Il est clair que  $b$  doit être pair et en simplifiant les deux relations par 32 et par 24, comme  $\sum \alpha_i$  et  $\sum \alpha_i^2$  ont même parité,  $b$  doit être multiple de 4. Un changement de variables donne  $b = 0$  donc de  $\alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$  résulte  $c = \alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2$  et le second membre est

$$Ax + B = 24 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) x + 10(\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2)^2 + 2.$$

Le coefficient  $A$  est toujours un multiple de 48; le coefficient  $B$  ne peut être que 2 ou  $\pm 4$  modulo 16, ce dernier cas étant intéressant: ainsi, en choisissant  $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 1)$

$$(6) \quad \begin{aligned} & (2x^2 + 4)^4 + (2x^2 + 2)^4 - 2(2x^2 + 3)^4 - (2x - 2)^4 \\ & - 2(2x + 1)^4 = 48(x + 2) - 4. \end{aligned}$$

Cette identité permet de montrer

LEMME. *Tous les entiers de la forme  $16m \pm k$ ,  $k \in \{4, 5\}$  sont somme d'au plus 8 bicarrés. Ceux de la forme  $16m \pm 6$  sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir la première partie du lemme, il suffit d'ajouter ou de retrancher à  $48X \pm 4$  l'un des trois nombres  $1^4$ ,  $2^4$  ou  $3^4$ . Pour la seconde, il suffit d'utiliser la première partie et  $1^4$ . Ces deux lemmes donnent la

PROPOSITION. *Parmi 16 entiers consécutifs, 13 au moins sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir  $v(4) \leq 10$ , les nombres de la forme  $16m \pm 7$  ne posent pas de problème. Pour ceux de la forme  $16m + 8$ , W. Hunter fournit des identités à dix termes:

$$(7) \quad \begin{aligned} & 24(y + 10319691) = (y^2 + 625)^4 + (y^2 + 603)^4 - (y^2 + 626)^4 \\ & - (y^2 + 602)^4 + (4y + 11)^4 + (2y - 87)^4 + (y + 125)^4 + (y - 9)^4 \\ & + (y - 41)^4 + (y - 83)^4 \end{aligned}$$

et

$$(8) \quad \begin{aligned} & 24(y + 120858614086) - 8 = (y^2 + 39873)^4 + (y^2 + 39851)^4 \\ & - (y^2 + 39874)^4 - (y^2 + 39850)^4 + (4y + 11)^4 + (2y - 87)^4 \\ & + (y + 1017)^4 + (y + 883)^4 + (y - 933)^4 + (y - 975)^4 \end{aligned}$$

qui donne le théorème  $v(4) \leq 10$ . L'origine de ces identités est analogue, bien que plus compliquée, à celle de (6). On considère,  $h$  et  $k$  étant entiers,  $\Delta_{h,k}(P) = (P + h + k)^4 - (P + h)^4 - (P + k)^4 + P^4$  du second degré en  $P$ ; il faut choisir  $h$  et  $k$  et les polynômes  $Q_i$  de sorte que

$$\Delta_{h,k}(P) - \sum_{i=1}^6 Q_i^4 = Ax + B.$$

Remarquons que, dans l'identité (8), si  $y$  est pair tous les polynômes ayant le signe + sont impairs (il y en a 8) et tous les polynômes ayant le signe moins

sont pairs: les nombres représentés sont donc de la forme  $16m + 8$ . Pour pouvoir éventuellement montrer que  $\nu(4) = 9$ , ou au moins que les nombres  $16m \pm 7$  sont somme d'au plus neuf bicarrés, il faut obtenir des identités où le nombre de polynômes précédés du signe  $+$  et celui des polynômes précédés du signe  $-$  sont très différents et il faut que beaucoup des premiers prennent des valeurs impaires, tous les autres prenant des valeurs paires. Ainsi on peut espérer pour  $B$  un résidu modulo 16 le plus élevé possible par rapport au nombre total  $h$  de polynômes. Ainsi on pourrait envisager de chercher une identité de la forme

$$(9) \quad (P + \alpha)^4 - P^4 + \sum_{i=1}^s Q_i^4 = Ax + B,$$

avec  $\alpha$  impair,  $P$  prenant des valeurs paires et les  $Q_i$  des valeurs impaires. Alors on aurait  $B \equiv s + 1 \pmod{16}$  ce qui fournirait des identités utilisables pour les nombres de la forme  $16m \pm 7$  et  $\pm 8$ . Cependant, comme  $d^\circ((P + \alpha)^4 - P^4) \equiv 0(3)$ , il faut que le degré de  $P$  soit un multiple de 4 et que l'un des  $Q_i$  au moins soit de degré multiple de 3.

On peut obtenir d'autres identités avec des bicarrés; par exemple

$$(10) \quad \sum_{i=1}^4 (a_i x + 1)^4 - (a_i x - 1)^4 = 8 \left( \sum_i a_i \right) x$$

si  $\sum_{i=1}^4 a_i^3 = 0$ , d'où des identités pour  $48x$  avec les suites  $(3, 4, 5, -6)$ ,  $(10, 9, -12, -1)$ ,  $(27, 16, -19, -18)$ ... (noter que  $\sum a_i \equiv \sum a_i^3 \pmod{6}$  est toujours divisible par 6).

D'autres identités à 4, 5 ou 6 termes peuvent s'obtenir facilement à l'aide de solutions triviales ou non triviales des équations  $\sum_{i=1}^s X_i^4 = \sum_{j=1}^t Y_j^4$  où les couples  $(s, t)$  sont  $(2, 2)$ ,  $(3, 2)$  ou  $(3, 3)$ .

### 3. IDENTITÉS ET PROBLÈMES DE TARRY-ESCOTT

L'identité (3), de degré 5, est le cas particulier d'identités beaucoup plus générales. Ainsi

$$(11) \quad \sum_{i=1}^s (x + a_i)^k - \sum_{j=1}^s (x + b_j)^k = Ax + B \quad \text{avec } A \neq 0$$