

## 2. Etude des bicarrés

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 2. ETUDE DES BICARRÉS

L'encadrement  $9 \leq \nu(4) \leq 10$  est dû à W. Hunter ([3]); nous allons en donner une présentation différente. Comme, modulo 16,  $x^4 \equiv 0$  ou 1, tout entier de la forme  $16n + 8$  nécessite au moins 8 bicarrés, tous de même signe; comme 24 n'est pas somme de huit bicarrés,  $\nu(4) \geq 9$ . Le même raisonnement ([8]) s'applique à toute puissance de 2:  $\nu(2^n) \geq 2^{n+1} + 1$ ,  $n \geq 2$ . L'inégalité  $\nu(4) \leq 10$  est plus délicate.

Ainsi on a:

$$(5) \quad (x+8)^4 - (x-8)^4 + (2x-1)^4 - (2x+1)^4 = 4080x.$$

Comme  $4080 = 16 \times 3 \times 5 \times 17$  et que modulo 3, modulo 5 et modulo 17 tout entier est somme algébrique d'au plus trois bicarrés, on a le

LEMME. *Tout entier de l'une des formes suivantes:  $16m$ ,  $16m \pm k$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$  est somme algébrique d'au plus 7 bicarrés.*

Nous allons maintenant utiliser une identité (2) due à W. Hunter, avec  $h = 7$ ,  $\max d^\circ P_i = 2$  et  $Ax + B = 48x + 4$ , dont nous donnons la genèse. Soit  $P$  un polynôme à valeurs entières:

$$(P+1)^4 + (P-1)^4 - 2P^4 = 12P^2 + 2.$$

Si  $P$  est de degré pair, le degré du second membre sera multiple de 4 et on peut chercher des polynômes à valeurs entières  $Q_i$  tels que

$$12P^2 + 2 - \sum_{i=1}^t Q_i^4 = Ax + B,$$

soit si  $A \neq 0$  une identité à  $t+4$  termes. Nous prenons ici  $P(x) = 2x^2 + bx + c$  et  $Q_i(x) = 2x + \alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , choix qui donne les relations

$$\begin{cases} 32 \sum \alpha_i = 48b \\ 24 \sum \alpha_i^2 = 12(b^2 + 4c). \end{cases}$$

Il est clair que  $b$  doit être pair et en simplifiant les deux relations par 32 et par 24, comme  $\sum \alpha_i$  et  $\sum \alpha_i^2$  ont même parité,  $b$  doit être multiple de 4. Un changement de variables donne  $b = 0$  donc de  $\alpha_3 = -(\alpha_1 + \alpha_2)$  résulte  $c = \alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2$  et le second membre est

$$Ax + B = 24 \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_1 + \alpha_2) x + 10(\alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2^2)^2 + 2.$$

Le coefficient  $A$  est toujours un multiple de 48; le coefficient  $B$  ne peut être que 2 ou  $\pm 4$  modulo 16, ce dernier cas étant intéressant: ainsi, en choisissant  $(\alpha_1, \alpha_2) = (1, 1)$

$$(6) \quad \begin{aligned} & (2x^2 + 4)^4 + (2x^2 + 2)^4 - 2(2x^2 + 3)^4 - (2x - 2)^4 \\ & - 2(2x + 1)^4 = 48(x + 2) - 4. \end{aligned}$$

Cette identité permet de montrer

LEMME. *Tous les entiers de la forme  $16m \pm k$ ,  $k \in \{4, 5\}$  sont somme d'au plus 8 bicarrés. Ceux de la forme  $16m \pm 6$  sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir la première partie du lemme, il suffit d'ajouter ou de retrancher à  $48X \pm 4$  l'un des trois nombres  $1^4$ ,  $2^4$  ou  $3^4$ . Pour la seconde, il suffit d'utiliser la première partie et  $1^4$ . Ces deux lemmes donnent la

PROPOSITION. *Parmi 16 entiers consécutifs, 13 au moins sont somme d'au plus 9 bicarrés.*

Pour obtenir  $\nu(4) \leq 10$ , les nombres de la forme  $16m \pm 7$  ne posent pas de problème. Pour ceux de la forme  $16m + 8$ , W. Hunter fournit des identités à dix termes:

$$(7) \quad \begin{aligned} & 24(y + 10319691) = (y^2 + 625)^4 + (y^2 + 603)^4 - (y^2 + 626)^4 \\ & - (y^2 + 602)^4 + (4y + 11)^4 + (2y - 87)^4 + (y + 125)^4 + (y - 9)^4 \\ & + (y - 41)^4 + (y - 83)^4 \end{aligned}$$

et

$$(8) \quad \begin{aligned} & 24(y + 120858614086) - 8 = (y^2 + 39873)^4 + (y^2 + 39851)^4 \\ & - (y^2 + 39874)^4 - (y^2 + 39850)^4 + (4y + 11)^4 + (2y - 87)^4 \\ & + (y + 1017)^4 + (y + 883)^4 + (y - 933)^4 + (y - 975)^4 \end{aligned}$$

qui donne le théorème  $\nu(4) \leq 10$ . L'origine de ces identités est analogue, bien que plus compliquée, à celle de (6). On considère,  $h$  et  $k$  étant entiers,  $\Delta_{h,k}(P) = (P + h + k)^4 - (P + h)^4 - (P + k)^4 + P^4$  du second degré en  $P$ ; il faut choisir  $h$  et  $k$  et les polynômes  $Q_i$  de sorte que

$$\Delta_{h,k}(P) - \sum_{i=1}^6 Q_i^4 = Ax + B.$$

Remarquons que, dans l'identité (8), si  $y$  est pair tous les polynômes ayant le signe + sont impairs (il y en a 8) et tous les polynômes ayant le signe moins

sont pairs: les nombres représentés sont donc de la forme  $16m + 8$ . Pour pouvoir éventuellement montrer que  $\nu(4) = 9$ , ou au moins que les nombres  $16m \pm 7$  sont somme d'au plus neuf bicarrés, il faut obtenir des identités où le nombre de polynômes précédés du signe  $+$  et celui des polynômes précédés du signe  $-$  sont très différents et il faut que beaucoup des premiers prennent des valeurs impaires, tous les autres prenant des valeurs paires. Ainsi on peut espérer pour  $B$  un résidu modulo 16 le plus élevé possible par rapport au nombre total  $h$  de polynômes. Ainsi on pourrait envisager de chercher une identité de la forme

$$(9) \quad (P + \alpha)^4 - P^4 + \sum_{i=1}^s Q_i^4 = Ax + B,$$

avec  $\alpha$  impair,  $P$  prenant des valeurs paires et les  $Q_i$  des valeurs impaires. Alors on aurait  $B \equiv s + 1 \pmod{16}$  ce qui fournirait des identités utilisables pour les nombres de la forme  $16m \pm 7$  et  $\pm 8$ . Cependant, comme  $d^\circ((P + \alpha)^4 - P^4) \equiv 0(3)$ , il faut que le degré de  $P$  soit un multiple de 4 et que l'un des  $Q_i$  au moins soit de degré multiple de 3.

On peut obtenir d'autres identités avec des bicarrés; par exemple

$$(10) \quad \sum_{i=1}^4 (a_i x + 1)^4 - (a_i x - 1)^4 = 8 \left( \sum_i a_i \right) x$$

si  $\sum_{i=1}^4 a_i^3 = 0$ , d'où des identités pour  $48x$  avec les suites  $(3, 4, 5, -6)$ ,  $(10, 9, -12, -1)$ ,  $(27, 16, -19, -18)$ ... (noter que  $\sum a_i \equiv \sum a_i^3 \pmod{6}$  est toujours divisible par 6).

D'autres identités à 4, 5 ou 6 termes peuvent s'obtenir facilement à l'aide de solutions triviales ou non triviales des équations  $\sum_{i=1}^s X_i^4 = \sum_{j=1}^t Y_j^4$  où les couples  $(s, t)$  sont  $(2, 2)$ ,  $(3, 2)$  ou  $(3, 3)$ .

### 3. IDENTITÉS ET PROBLÈMES DE TARRY-ESCOTT

L'identité (3), de degré 5, est le cas particulier d'identités beaucoup plus générales. Ainsi

$$(11) \quad \sum_{i=1}^s (x + a_i)^k - \sum_{j=1}^s (x + b_j)^k = Ax + B \quad \text{avec } A \neq 0$$