

5. Retour sur le problème de Tarry-Escott

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Le coefficient de x de second membre est $A = 18u^8v^8w^8(w^{18} - v^{18})Q(v, w)$ où Q est le polynôme

$$Q(x, y) = x^{54} + y^{54} - x^{54}y^{54} + x^{36} + y^{36} + x^{18}y^{18} + x^{36}y^{18} + x^{18}y^{36}.$$

La longueur de l'identité est 24 ce qui la rend pratiquement inutile.

5. RETOUR SUR LE PROBLÈME DE TARRY-ESCOTT

En degré k suffisamment petit, beaucoup d'identités et donc de majoration de $v_*(k)$ proviennent de s -uples (a_1, \dots, a_s) et (b_1, \dots, b_s) dont les $k - 2$ premières fonctions symétriques élémentaires coïncident. On écrira alors suivant une notation classique dans cette question $[a_1, \dots, a_s]_{k-2} = [b_1, b_2, \dots, b_s]_{k-2}$. La recherche systématique de tels s -uples se fait en général inductivement, à l'aide des deux opérations suivantes ([4], [6]).

LEMME. Si $[a_1, \dots, a_r]_k = [b_1, \dots, b_r]_k$, alors quel que soit x

- 1) $[a_1, \dots, a_r, b_1 + x, b_2 + x, \dots, b_{r+x}]_{k+1} = [a_1 + x, a_2 + x, \dots, a_r + x, b_1, b_2, \dots, b_r]_{k+1}$.
- 2) $[a_1, \dots, a_r, a_1 + x, \dots, a_r + x]_k = [b_1, \dots, b_r, b_1 + x, \dots, b_r + x]_k$.

Naturellement la longueur des s -uples déduit par le procédé récurrent est le double des s -uples de départ mais un choix judicieux peut permettre de réduire cette longueur: en effet chaque fois que l'on a $a_i + x = a_j$ (resp. $b_u + x = b_v$) on pourra supprimer dans l'égalité des deux crochets, les termes égaux, aussi pour appliquer la règle en question on calcule $\{a_i - a_j / i > j\}$ et $\{b_i - b_j / i > j\}$ et on choisit pour x l'un des entiers qui est le plus souvent une différence de deux a_i et de deux b_i . Ainsi partant de $[0, 3]_1 = [1, 2]_1$ en ajoutant 3 puis 5 puis 7, on trouve $[0, 4, 5]_2 = [1, 2, 6]_2$, $[0, 4, 7, 11]_3 = [1, 2, 9, 10]_3$ et $[0, 4, 8, 16, 17]_4 = [1, 2, 10, 14, 18]_4$ ce qui montre que $p(k) = k + 1$ pour $k \leq 4$ et que $v_*(k) = 2(k - 1)$ pour $k \leq 6$. On peut développer cette technique et s'essayer à trouver de nombreux exemples de s -uples vérifiant $[a_1, \dots, a_s]_h = [b_1, \dots, b_s]_h$ mais il n'est pas évident de minimaliser s par rapport à h .

On peut aussi opérer littéralement en partant de $[a, b]_1 = [c, a + b - c]_1$ en prenant x dans le \mathbf{Z} -module libre de base (a, b, c) . On prend $x = b - a$ d'où $[a, b + c - a, 2b - c]_2 = [c, a + b - c, 2b - a]_2$; ensuite on peut prendre $y = a - 2b + c$ d'où

$$\begin{aligned}
 & [b + c - a, 2b - c, a - 2b + 2c, 2a - b]_3 \\
 & = [2b - a, a + b - c, 2a - 2b + c, -b + 2c]_3
 \end{aligned}$$

ce qui fournit une famille d'identités

$$\sum_{i=1}^4 (x + a_i)^5 - (x + b_i)^5 = Ax + B$$

où A est un polynôme homogène de degré 4. L'identité (3) en est un cas particulier provenant de $[0, 3, 4, 7]_3 = [1, 1, 6, 6]_3$ qu'on peut obtenir à partir de $[0, 4, 5]_2 = [1, 2, 6]_2$ en ajoutant 1 (au lieu de 7). L'existence de plusieurs choix possibles pour x rajoute à la difficulté d'une étude systématique qui pour l'instant n'a fourni ainsi que des exemples. On trouvera dans [9] des références bibliographiques ainsi que des majorations explicites pour $p(k)$ et $M(k)$ définis dans la partie précédente.

RÉFÉRENCES

- [1] ELLISON, W. J. Waring's problem. *Amer. math. monthly* 78 (1971), 10-36.
- [2] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An introduction to the Theory of Numbers*. 4^e édition, Clarendon Press, Oxford (1960).
- [3] HUNTER, W. The representation of numbers by sums of fourth powers. *J. Lon. Math. Soc.* 16 (1941), 143-145.
- [4] MEHROTRA, S. N. On sums of powers. *Mathematics Student* 35 (1967), 73-77, 37 (1969), 204-205.
- [5] MORDELL, L. J. *Diophantine equations*. Academic Press, London and New York (1968).
- [6] RAI, T. Easier Waring problem. *J. Sci. Res. Benares Hindu Univ.* 1 (1951), 5-19.
- [7] REVOY, Ph. Sur les sommes de quatre cubes. *L'Enseignement Math.* 29 (1983), 209-220.
- [8] VASERSTEIN, L. N. Every integer is a sum or difference of 28 integral eighth powers. *J. of Numb. Th.* 28 (1988), 66-68.
- [9] WRIGHT, E. M. Equal sums of like powers. *Cand. Math. Bull.* 8 (1965), 193-202.

(Reçu le 27 décembre 1990)

Philippe Revoy

Département des Sciences Mathématiques
 Université Montpellier II
 Plage Eugène-Bataillon
 F-34095 Montpellier Cedex 5 (France)