5. Retour sur le problème de Tarry-Escott

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Le coefficient de x de second membre est $A = 18u^8v^8w^8(w^{18} - v^{18})Q(v, w)$ où Q est le polynôme

$$Q(x, y) = x^{54} + y^{54} - x^{54}y^{54} + x^{36} + y^{36} + x^{18y18} + x^{36}y^{18} + x^{18}y^{36} .$$

La longueur de l'identité est 24 ce qui la rend pratiquement inutile.

5. Retour sur le problème de Tarry-Escott

En degré k suffisamment petit, beaucoup d'identités et donc de majoration de $v_*(k)$ proviennent de s-uples $(a_1, \ldots, a_s)$ et $(b_1, \ldots, b_s)$ dont les $k-2$ premières fonctions symétriques élémentaires coïncident. On écrira alors suivant une notation classique dans cette question $[a_1, \ldots, a_s]_{k-2} = [b_1, b_2, \ldots, b_s]_{k-2}$. La recherche systématique de tels s-uples se fait en général inductivement, à l'aide des deux opérations suivantes ([4], [6]).

Lemme. *Si* $[a_1, \ldots, a_r]_k = [b_1, \ldots, b_r]_k$, *alors quel que soit* x

1)
$$[a_1, \ldots, a_r, b_1 + x, b_2 + x, \ldots, b_{r+x}]_{k+1} = [a_1 + x, a_2 + x, \ldots, a_r + x, b_1, b_2, \ldots, b_r]_{k+1} .$$

2)
$$[a_1, \ldots, a_r, a_1 + x, \ldots, a_r + x]_k = [b_1, \ldots, b_r, b_1 + x, \ldots, b_r + x]_k .$$

Naturellement la longueur des s-uples déduit par le procédé récurrent est le double des s-uples de départ mais un choix judicieux peut permettre de réduire cette longueur: en effet chaque fois que l'on a $a_i + x = a_j$ (resp. $b_u + x = b_v$) on pourra supprimer dans l'égalité des deux crochets, les termes égaux, aussi pour appliquer la règle en question on calcule $\{a_i - a_j / i > j\}$ et $\{b_i - b_j / i > j\}$ et on choisit pour x l'un des entiers qui est le plus souvent une différence de deux a_i et de deux b_i. Ainsi partant de $[0, 3]_1 = [1, 2]_1$ en ajoutant 3 puis 5 puis 7, on trouve $[0, 4, 5]_2 = [1, 2, 6]_2$, $[0, 4, 7, 11]_3 = [1, 2, 9, 10]_3$ et $[0, 4, 8, 16, 17]_4 = [1, 2, 10, 14, 18]_4$ ce qui montre que $p(k) = k + 1$ pour $k \leqslant 4$ et que $v_*(k) = 2(k-1)$ pour $k \leqslant 6$. On peut développer cette technique et s'essayer à trouver de nombreux exemples de s-uples vérifiant $[a_1, \ldots, a_s]_h = [b_1, \ldots, b_s]_h$ mais il n'est pas évident de minimaliser s par rapport à h.

On peut aussi opérer littéralement en partant de $[a, b]_1 = [c, a + b - c]_1$ en prenant x dans le $\mathbf{Z}$-module libre de base (a, b, c). On prend $x = b - a$ d'où $[a, b + c - a, 2b - c]_2 = [c, a + b - c, 2b - a]_2$; ensuite on peut prendre $y = a - 2b + c$ d'où

$$[b+c-a, 2b-c, a-2b+2c, 2a-b]_3$$
$$= [2b-a, a+b-c, 2a-2b+c, -b+2c]_3$$

ce qui fournit une famille d'identités

$$\sum_{i=1}^{4} (x+a_i)^5 - (x+b_i)^5 = Ax + B$$

où A est un polynôme homogène de degré 4. L'identité (3) en est un cas particulier provenant de $[0,3,4,7]_3 = [1,1,6,6]_3$ qu'on peut obtenir à partir de $[0,4,5]_2 = [1,2,6]_2$ en ajoutant 1 (au lieu de 7). L'existence de plusieurs choix possibles pour x rajoute à la difficulté d'une étude systématique qui pour l'instant n'a fourni ainsi que des exemples. On trouvera dans [9] des références bibliographiques ainsi que des majorations explicites pour $p(k)$ et $M(k)$ définis dans la partie précédente.

RÉFÉRENCES

[1] ELLISON, W. J. Waring's problem. *Amer. math. monthly 78* (1971), 10-36.

[2] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An introduction to the Theory of Numbers.* 4e édition, Clarendon Press, Oxford (1960).

[3] HUNTER, W. The representation of numbers by sums of fourth powers. *J. Lon. Math. Soc. 16* (1941), 143-145.

[4] MEHROTRA, S. N. On sums of powers. *Mathematics Student 35* (1967), 73-77, *37* (1969), 204-205.

[5] MORDELL, L. J. *Diophantine equations.* Academic Press, London and New York (1968).

[6] RAI, T. Easier Waring problem. *J. Sci. Res. Benares Hindu Univ. 1* (1951), 5-19.

[7] REVOY, Ph. Sur les sommes de quatre cubes. *L'Enseignement Math. 29* (1983), 209-220.

[8] VASERSTEIN, L. N. Every integer is a sum or difference of 28 integral eighth powers. *J. of Numb. Th. 28* (1988), 66-68.

[9] WRIGHT, E. M. Equal sums of like powers. *Cand. Math. Bull. 8* (1965), 193-202.

(Reçu le 27 décembre 1990)

Philippe Revoy

Département des Sciences Mathématiques
Université Montpellier II
Plage Eugène-Bataillon
F-34095 Montpellier Cedex 5 (France)