

## 2. The operator T

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

In these coordinates we can write down the  $q + 1$  vertices of  $X$  that are adjacent to a typical vertex  $\begin{pmatrix} t^n & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . They are

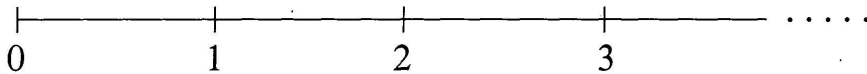
$$\begin{pmatrix} t^{n+1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t^{n-1} & \xi t^n + x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \xi \in k.$$

The group  $G_K$  acts on the tree  $X$  as a group of automorphisms. We can therefore define a graph structure on the quotient  $F$  for the action of  $\Gamma$  on  $X$ .

**THEOREM 1.2** ([S], [W]). *The quotient graph  $F = \Gamma \backslash X$  is given by (the cosets of)*

$$\begin{pmatrix} t^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad n \geq 0,$$

so that  $F$  is the tree



In fact, the vertex  $\begin{pmatrix} t^n & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  corresponds to  $n$ , and so if  $n \geq 1$ , its neighbor  $\begin{pmatrix} t^{n+1} & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  corresponds to  $n + 1$  while the other  $q$  neighbors are represented by  $n - 1$ . If  $n = 0$ , all neighbors correspond to 1.

## 2. THE OPERATOR $T$

Let  $\mu$  be the Haar measure on  $G_K$  normalized so that  $\mu(G_O) = q(q - 1)$ . We compute the measure of  $F$  induced from  $\mu$ . Since

$$F = \Gamma \backslash X = \Gamma \backslash G_K / G_O$$

we have

$$\Gamma \backslash G_K = \cup_{s \in F} sG_O,$$

where

$$sG_O = \{\Gamma su \mid u \in G_O\} \subset \Gamma \backslash G_K.$$

The point measure at  $s$  will be the measure of  $sG_O$  in the quotient space  $\Gamma \backslash G_K$ . Now we have a correspondence

$$sG_O \simeq s^{-1}\Gamma_s s \setminus G_O ,$$

where  $\Gamma_s = \Gamma \cap sG_O s^{-1}$  is the finite subgroup of  $\Gamma$  that stabilizes  $s$ . Thus

$$\mu(sG_O) = \frac{\mu(G_O)}{|\Gamma_s|} .$$

It is not hard to check that if  $s = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  then  $|\Gamma_s| = q(q^2 - 1)$ , while

for  $s = \begin{pmatrix} t^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $n \geq 1$ ,  $|\Gamma_s| = (q - 1)q^{n+1}$ . We therefore put mass

$\frac{1}{q+1}$  at the vertex 0 and  $q^{-n}$  at the vertices  $n = 1, 2, \dots$ , so that if  $f$  and  $g$  are functions on  $F = \{0, 1, 2, \dots\}$  then

$$(2) \quad \langle f, g \rangle = \int_F f \bar{g} d\mu = \frac{1}{q+1} f(0)\bar{g}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\bar{g}(n)q^{-n} .$$

The algebra of operators on functions on the tree  $X$  that commute with the automorphisms of  $X$  is generated by the operator

$$(Tf)(s) = \sum_{s' \text{ is adjacent to } s} f(s')$$

(see [C2]). The operator  $(q+1)I - T$  is the Laplacian on  $X$ .

If  $f$  is  $\Gamma$ -automorphic, and therefore can be thought of as a function on  $F$ , then  $T$  operates on  $f$  by

$$(3) \quad (Tf)(n) = \begin{cases} qf(n-1) + f(n+1), & \text{if } n \geq 1, \\ (q+1)f(1), & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

PROPOSITION 2.1.  $T$  is a self-adjoint operator on  $L^2(F)$  with respect to the measure  $\mu$ .

*Proof.* If the series  $\|f\|^2$  converges, then Cauchy's inequality implies that the four series in  $\|Tf\|^2$  also converge. Thus  $T$  maps  $L^2(F)$  into itself. Now

$$\begin{aligned} \langle Tf, \bar{g} \rangle &= \frac{1}{q+1} (q+1)f(1)g(0) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (qf(n-1)g(n) + f(n+1)g(n))q^{-n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(1)g(0) + \sum_{n=0}^{\infty} qf(n)g(n+1)q^{-(n+1)} + \sum_{n=2}^{\infty} f(n)g(n-1)q^{-(n-1)} \\
&= f(1)g(0) + f(0)g(1) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n+1)q^{-n} \\
&\quad + q \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n-1)q^{-n} - f(1)g(0) \\
&= f(0)g(1) + \sum_{n=0}^{\infty} (f(n)qg(n-1) + f(n)g(n+1))q^{-n} = \langle f, T\bar{g} \rangle .
\end{aligned}$$

### 3. EIGENFUNCTIONS

An automorphic eigenfunction of  $T$  on  $X$  with eigenvalue  $\lambda$  is a function on  $F$  that satisfies

$$\lambda f(0) = (q+1)f(1) ,$$

$$\lambda f(n) = qf(n-1) + f(n+1) , \quad n \geq 1 .$$

If we write  $u(n) = \begin{pmatrix} f(n+1) \\ f(n) \end{pmatrix}$  and normalize  $u(0) = \begin{pmatrix} \lambda \\ q+1 \end{pmatrix}$ , we obtain the recursion

$$u(n) = A^n u(0)$$

with

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -q \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Let  $x_1, x_2 = \frac{1}{2}(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4q})$  be the characteristic roots of  $A$  and assume that  $x_1 \neq x_2$ , i.e., that  $\lambda \neq \pm 2\sqrt{q}$ . Solving the recursion we get

**PROPOSITION 3.1.** *The eigenfunctions on  $F$  with eigenvalue  $\lambda$  are the multiples of the function*

$$(4) \quad f_\lambda(n) = \begin{cases} \frac{1}{x_1 - x_2} (\lambda(x_1^n - x_2^n) - q(q+1)(x_1^{n-1} - x_2^{n-1})) , & \text{if } n \geq 1 \\ q+1 & \text{if } n = 0 . \end{cases}$$