

1. Simplices with small faces

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **37 (1991)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

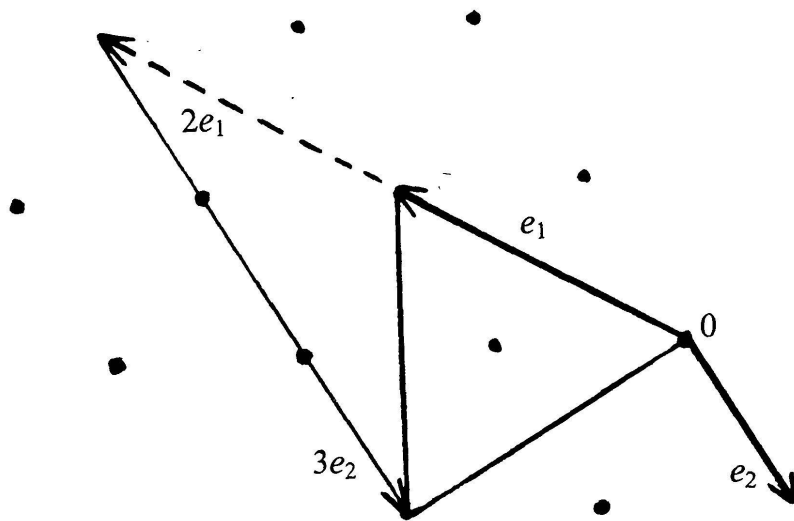
Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

In the hexagonal lattice:



Example 0.7. Case where $n = 3, k = 2$.

Let $C = [0, 1]^3$ be the standard cube of \mathbf{R}^3 . Let Δ be the tetrahedron defined by the vertices of the cube of which the sum of the coordinates is even. It is easy to see that Δ is affinely regular and that the linear transformation defined by

$$e_1 \mapsto -e_3, \quad e_2 \mapsto e_1 + e_3, \quad e_3 \mapsto e_2 + e_3$$

(where (e_1, e_2, e_3) is the standard basis of \mathbf{R}^3) sends Δ to the representant given in Theorem 0.5.

1. SIMPLICES WITH SMALL FACES

Definition 1.1. An integral simplex S is said to have *small faces* if, for each hyperplan H containing a $(n-1)$ -face of S , the vertices of S contained in H constitute an affine \mathbf{Z} -basis of $\mathbf{Z}^n \cap H$.

A *numerotation* of an integral simplex S is an enumeration

$$v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$$

of the vertices of S . We will denote by S_v the simplex S with numerotation v . The group $\text{Aff}(\mathbf{Z}^n)$ acts naturally on the set of numerated simplices and we

will say that S_v (with $v = (v_0, \dots, v_n)$) is equivalent to $S_{v'}$ (with $v' = (v'_0, \dots, v'_n)$) if there exists $g \in \text{Aff}(\mathbf{Z}^n)$ such that $g(v_i) = v'_i$ for all i .

The group σ_{n+1} acts on the set of numerated simplices: If $s \in \sigma_{n+1}$ is a permutation of $\{0, \dots, n\}$ and if S_v is an integral simplex numerated by $v = (v_0, \dots, v_i, \dots, v_n)$, we define

$$s \cdot S_v = S_{s \cdot v}$$

where

$$s \cdot v = (v_{s^{-1}(0)}, \dots, v_{s^{-1}(i)}, \dots, v_{s^{-1}(n)}) .$$

This action of σ_{n+1} commutes with that of $\text{Aff}(\mathbf{Z}^n)$, hence σ_{n+1} acts also on the equivalence classes of numerated simplices modulo $\text{Aff}(\mathbf{Z}^n)$.

An integral simplex S is affinely regular if and only if the stabilizer $\text{Stab}(S)$ operates transitively on the numerations of S .

Let us recall an elementary and well-known lemma:

LEMMA 1.2. *Let v_1, \dots, v_{n-1} be linearly independent vectors of \mathbf{Z}^n . Let H be the hyperplane of \mathbf{R}^n generated by the v_i 's, and suppose that v_1, \dots, v_{n-1} form a basis of the sublattice $H \cap \mathbf{Z}^n$.*

Then we can complete v_1, \dots, v_{n-1} to a basis of \mathbf{Z}^n .

Proof. See for instance the Corollary in Bourbaki, *Algèbre*, chap. VII, §4, No. 3.

From this point until the end of section 2, k will be some fixed natural integer. Let now S_v be a numerated simplex with small faces, of volume $k/n!$. Let $\{e_1, \dots, e_n\}$ be the canonical basis of $\mathbf{Z}^n \subset \mathbf{R}^n$. The lemma implies that there exists $g \in \text{Aff}(\mathbf{Z}^n)$ such that gS_v has vertices

$$v_0 = 0, v_1 = e_1, \dots, v_{n-1} = e_{n-1}, v_n = ke_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i e_i$$

where the a_i 's are integers. An easy calculation shows that the a_i 's are well defined (mod k).

Let us associate to S_v the element $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$, where α_i is the class of a_i (mod k). This gives us a map $\rho_k: \Sigma_k \rightarrow (\mathbf{Z}/k\mathbf{Z})^{n-1}$, where Σ_k is the set of numerated simplices with small faces of volume $k/n!$. For $S_v \in \Sigma_k$, the element $\rho_k(S_v)$ depends only of the equivalence class of S_v modulo $\text{Aff}(\mathbf{Z}^n)$ and this allows us to define an action of σ_{n+1} on $\rho_k(\Sigma_k)$.