

# 1. EINLEITUNG

Objektyp: **Preface**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN

von Walter BRÄGGER<sup>1</sup>

## 1. EINLEITUNG

Sei  $G$  die Sphäre  $S^2$  oder die euklidische Ebene  $\mathbf{E}$  mit der üblichen Metrik. Eine Familie abgeschlossener Kreisscheiben in  $G$  nennen wir eine Kreispackung, wenn je zwei dieser Kreisscheiben keinen inneren Punkt gemeinsam haben. Einer Kreispackung können wir einen simplizialen 1-Komplex zuordnen. Wir nehmen als Eckpunkte (0-Simplices) die Mittelpunkte der Kreisscheiben und als Kanten (1-Simplices) die geodätischen Verbindungslinien der Mittelpunkte tangenter Kreisscheiben. Diesen 1-Komplex nennen wir den Graphen der Kreispackung. Im weiteren wollen wir nur solche Kreispackungen betrachten, deren Graphen 1-Skelette von endlichen Triangulierungen sind (siehe Fig. 1). Seien  $K_1$  und  $K_2$  zwei simpliziale 1-Komplexe,  $f$  eine Bijektion zwischen den Mengen der Eckpunkte und  $g$  eine Bijektion zwischen den Kantenmengen der beiden Komplexe. Das Paar  $(f, g)$  nennen wir eine kombinatorische Äquivalenz, wenn die Bilder zweier durch eine Kante  $k$  verbundener Eckpunkte, durch die Bildkante von  $k$  verbunden sind. Die 1-Skelette zweier Triangulierungen  $T_1$  und  $T_2$  nennen wir kombinatorisch äquivalent, wenn es eine kombinatorische Äquivalenz ihrer Eckpunkte- und Kantenmenge gibt. Es gilt der folgende Satz von Andreev. Die hier zitierte Form mittels Kreispackungen stammt von Thurston (vgl. [An] und [Tu]):

**SATZ VON ANDREEV.** *Sei  $T$  eine Triangulierung der Sphäre  $S^2$ , dann existiert bis auf Möbiustransformation genau eine Kreispackung, deren Graph kombinatorisch äquivalent zum 1-Skelett von  $T$  ist.*

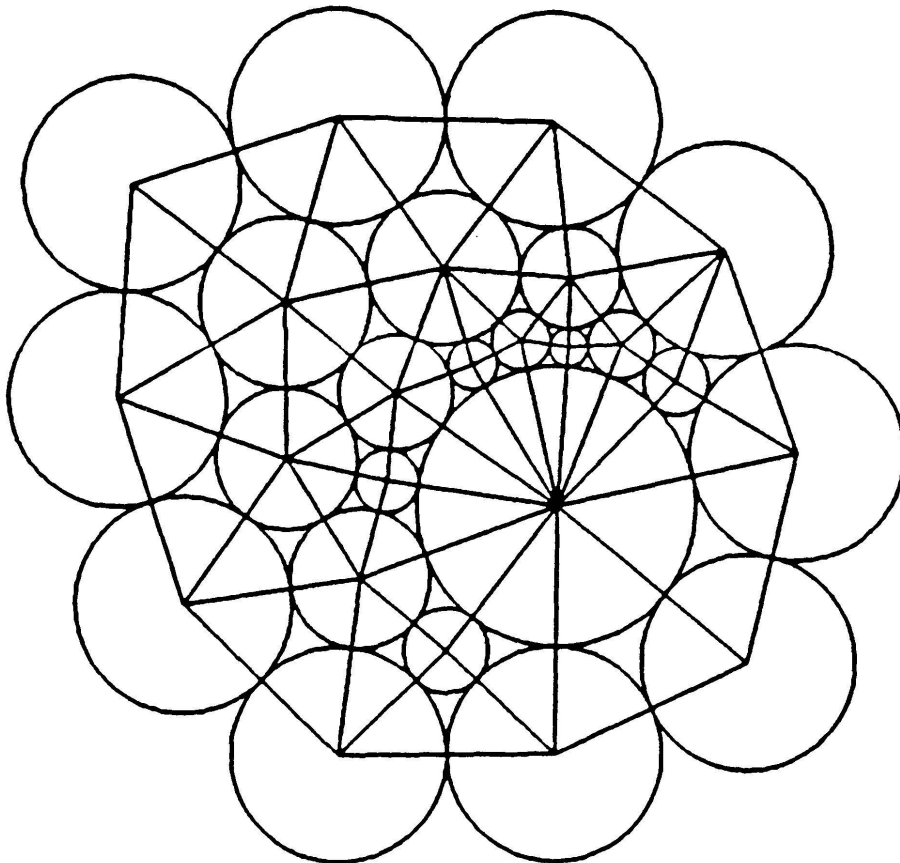
Yves Colin de Verdière hat bewiesen (siehe [CV1]), dass eine Kreispackung wie im Satz von Andreev dem Minimum eines konvexen, eigentlichen Funktionals auf  $\mathbf{R}^E$  ( $E$ =Eckpunktmenge von  $T$ ) entspricht. Diese Funktionale sind als Integrale über geschlossene Differentialformen gegeben.

---

<sup>1</sup> Diplomarbeit bei Prof. Dr. Norbert A'Campo. Für seine Hilfe möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken.

Untersucht man diese Funktionale, stösst man rasch auf die Lobachevsky-Funktion und damit auf das Volumen hyperbolischer 3-Simplices.

Im folgenden wollen wir den Satz von Andreev beweisen, indem wir Kreispackungen als Maxima konkaver Funktionale auf  $\mathcal{W} = [0, \pi]^S$  ( $S$  = Sektorenmenge von  $T$ ) interpretieren.



FIGUR 1

Beispiel einer Kreispackung

## 2. VORBEREITUNGEN

2.1. Sei  $P$  ein Polyeder, dessen Standard-Realisierung  $|P|$  in  $\mathbf{R}^E$  homöomorph zu einer Kreisscheibe ist. Seien  $E = E(P)$ ,  $K = K(P)$ ,  $\Delta = \Delta(P)$  die Mengen aller *Eckpunkte* (0-Simplices), *Kanten* (1-Simplices) und *Dreiecke* (2-Simplices) von  $P$ . Jedes 2-Simplex hat drei Winkelsektoren, im folgenden