1. EINLEITUNG

Objekttyp: **Preface**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

KREISPACKUNGEN UND TRIANGULIERUNGEN

von Walter BRÄGGER [1]

1. EINLEITUNG

Sei G die Sphäre S^2 oder die euklidische Ebene $\mathbf{E}$ mit der üblichen Metrik. Eine Familie abgeschlossener Kreisscheiben in G nennen wir eine Kreispackung, wenn je zwei dieser Kreisscheiben keinen inneren Punkt gemeinsam haben. Einer Kreispackung können wir einen simplizialen 1-Komplex zuordnen. Wir nehmen als Eckpunkte (0-Simplices) die Mittelpunkte der Kreisscheiben und als Kanten (1-Simplices) die geodätischen Verbindungslinien der Mittelpunkte tangenter Kreisscheiben. Diesen 1-Komplex nennen wir den Graphen der Kreispackung. Im weiteren wollen wir nur solche Kreispackungen betrachten, deren Graphen 1-Skelette von endlichen Triangulierungen sind (siehe Fig. 1). Seien K_1 und K_2 zwei simpliziale 1-Komplexe, f eine Bijektion zwischen den Mengen der Eckpunkte und g eine Bijektion zwischen den Kantenmengen der beiden Komplexe. Das Paar (f, g) nennen wir eine kombinatorische Äquivalenz, wenn die Bilder zweier durch eine Kante k verbundener Eckpunkte, durch die Bildkante von k verbunden sind. Die 1-Skelette zweier Triangulierungen T_1 und T_2 nennen wir kombinatorisch äquivalent, wenn es eine kombinatorische Äquivalenz ihrer Eckpunkte- und Kantenmenge gibt. Es gilt der folgende Satz von Andreev. Die hier zitierte Form mittels Kreispackungen stammt von Thurston (vgl. [An] und [Tu]:

SATZ VON ANDREEV. *Sei T eine Triangulierung der Sphäre S^2, dann existiert bis auf Möbiustransformation genau eine Kreispackung, deren Graph kombinatorisch äquivalent zum 1-Skelett von T ist.*

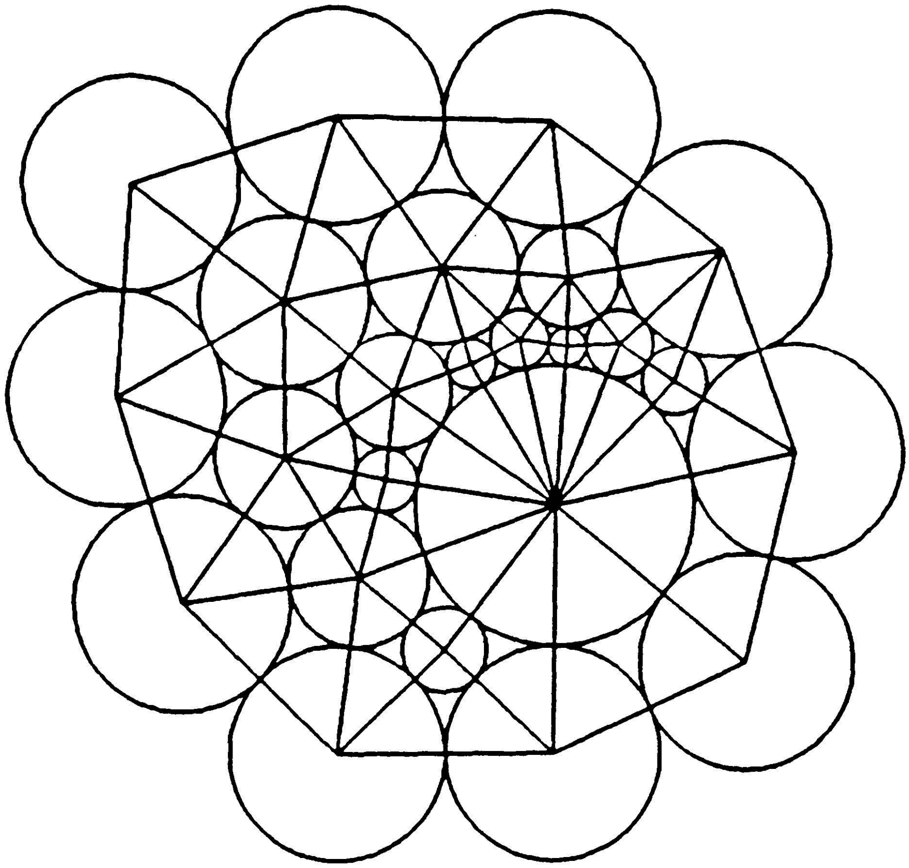
Yves Colin de Verdière hat bewiesen (siehe [CV1]), dass eine Kreispackung wie im Satz von Andreev dem Minimum eines konvexen, eigentlichen Funktionals auf $\mathbf{R}^E$ (E = Eckpunktmenge von T) entspricht. Diese Funktionale sind als Integrale über geschlossene Differentialformen gegeben.

---

[1] Diplomarbeit bei Prof. Dr. Norbert A'Campo. Für seine Hilfe möchte ich ihm an dieser Stelle herzlich danken.

Untersucht man diese Funktionale, stösst man rasch auf die Lobachevsky-Funktion und damit auf das Volumen hyperbolischer 3-Simplices.

Im folgenden wollen wir den Satz von Andreev beweisen, indem wir Kreispackungen als Maxima konkaver Funktionale auf $W = [0, \pi]^S$ (S = Sektorenmenge von T) interpretieren.



FIGUR 1

Beispiel einer Kreispackung

2. Vorbereitungen

2.1. Sei P ein Polyeder, dessen Standard-Realisierung $|P|$ in $\mathbf{R}^E$ homöomorph zu einer Kreisscheibe ist. Seien $E = E(P)$, $K = K(P)$, $\Delta = \Delta(P)$ die Mengen aller *Eckpunkte* (0-Simplices), *Kanten* (1-Simplices) und *Dreiecke* (2-Simplices) von P. Jedes 2-Simplex hat drei Winkelsektoren, im folgenden