

## 4. IMMERSIERTE KREISPACKUNGEN

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

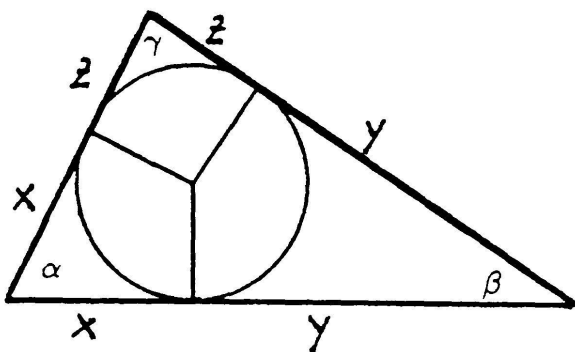
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

4. IMMERSIERTE KREISPACKUNGEN

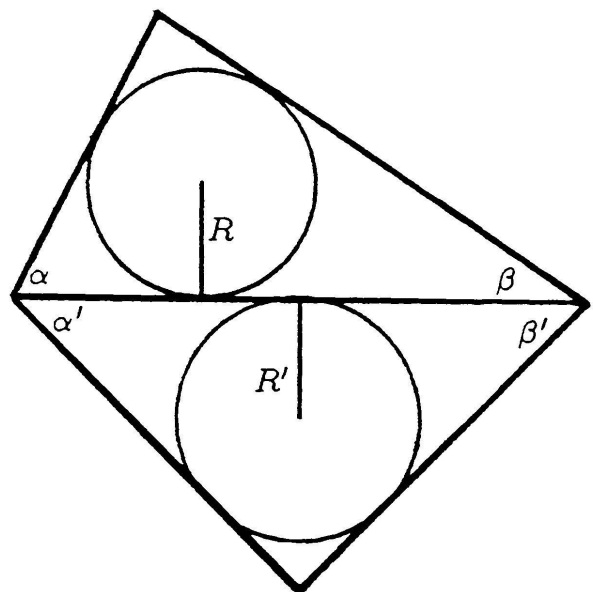
4.1. Satz 3.6. besagt, dass  $L_{Koh}$  auf  $W_{Koh}$  genau einen kritischen Punkt  $\eta$  annimmt. Da die Vektoren  $\{t_k | k \in K\}$  den Tangentialraum  $T_\eta W_{Koh}$  aufspannen, ist  $\eta \in W_{Koh}$  genau dann ein kritischer Punkt, wenn  $(DL_{Koh})_\eta(t_k) = 0, \forall k \in K$ . Ist  $k$  eine Kante von  $P$  und  $\eta \in W_{Koh}$  können wir die Blume um  $k$ , d.h. die Vereinigung aller Dreiecke in welchen  $k$  enthalten ist, geometrisch realisieren.

*Bemerkung.* Drei Grössen  $a, b, c$ , welche die Dreiecksungleichungen erfüllen, definieren bis auf Kongruenz genau ein euklidisches Dreieck. Sei  $x = (-a + b + c)/2, y = (+a - b + c)/2$  und  $z = (+a + b - c)/2$ . Dann ist  $a = y + z, b = x + z, c = y + x$  und wegen den Dreiecksungleichungen sind  $x, y$  und  $z$  positiv. Umgekehrt definieren drei positive Grössen  $x, y$  und  $z$  bis auf Kongruenz genau ein euklidisches Dreieck. Der Inkreis eines Dreiecks teilt die Seiten gerade im Verhältnis  $x/y, y/z$  und  $z/x$  (siehe Figur 7).

Sei zuerst  $k \in K_{in}$  eine innere Kante. Realisieren wir die Blume um  $k$  in  $\mathbf{E}$ , erhalten wir zwei Dreiecke  $d_\eta$  und  $d'_\eta$  mit gemeinsamer Kante  $|k|$  und den Winkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  bzw.  $\alpha', \beta', \gamma'$ . Die Inkreise der Dreiecke  $d_\eta$  und  $d'_\eta$  teilen die Kante  $|k|$  im Verhältnis  $x/y$  und  $x'/y'$ . Sind  $R$  und  $R'$  die Inkreise der Dreiecke  $d_\eta$  und  $d'_\eta$  so folgt (siehe Figur 8):



FIGUR 7



FIGUR 8

Zwei Dreiecke mit gemeinsamer Kante

$$\begin{aligned}
 0 &= (DL_{Koh})_\eta(t_k) \\
 &= \frac{d}{d\varepsilon} L(\eta + \varepsilon t_k) \Big|_{\varepsilon=0}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \log \tan \frac{\alpha}{2} - \log \tan \frac{\beta}{2} - \log \tan \frac{\alpha'}{2} + \log \tan \frac{\beta'}{2} \\
&= \log \frac{R}{x} - \log \frac{R}{y} - \log \frac{R'}{x'} + \log \frac{R'}{y'} \\
&= -\log \frac{x}{y} + \log \frac{x'}{y'},
\end{aligned}$$

und somit

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'}.$$

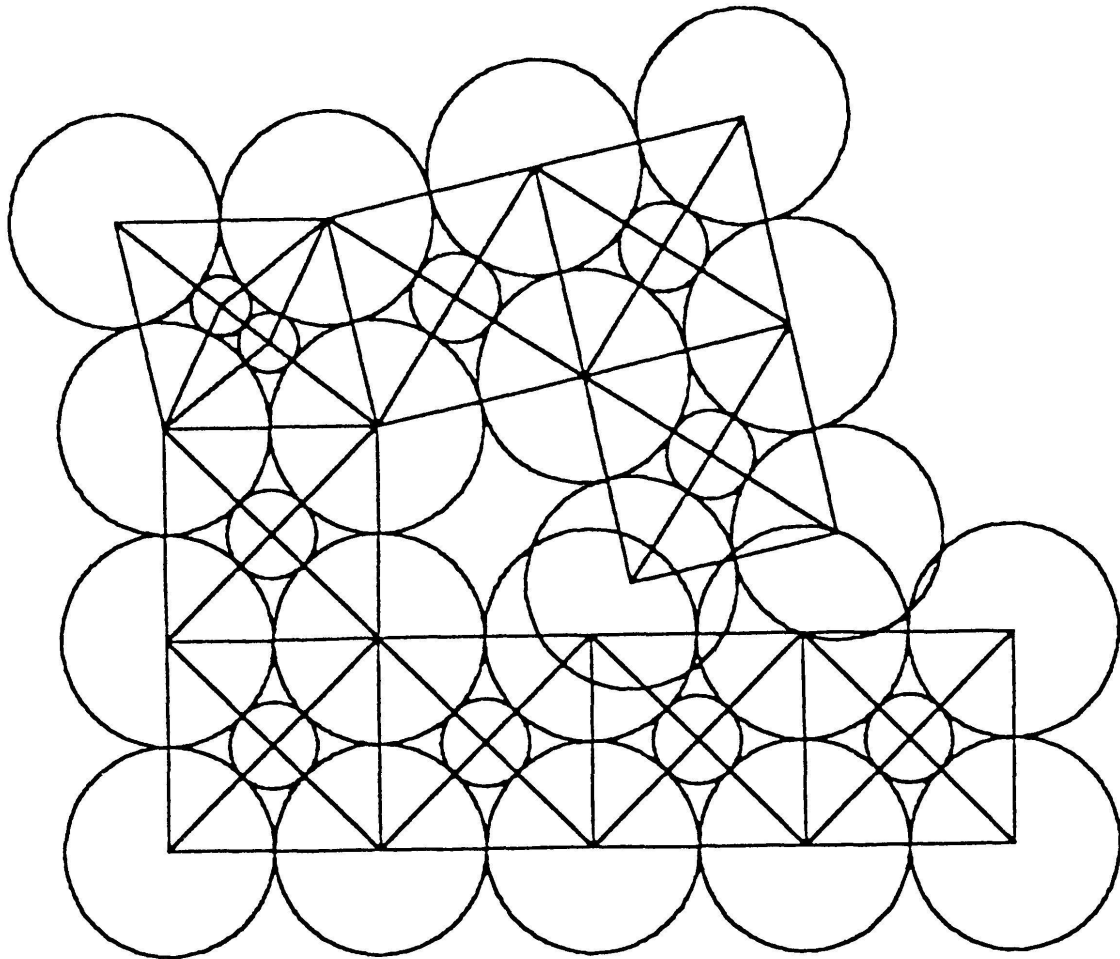
Realisieren wir in  $\mathbf{E}$  die beiden an  $k$  anliegenden Dreiecke mit gemeinsamer Kante  $|k|$ , so ist  $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k)$  genau dann null, wenn sich die Inkreise der beiden Dreiecke berühren. Somit ist  $x = x', y = y'$  und da  $R = x \cdot \tan(\alpha/2)$  gilt für die Inkreise  $R$  und  $R'$

$$\frac{R}{R'} = \frac{\tan \frac{\alpha}{2}}{\tan \frac{\alpha'}{2}}.$$

Ist  $k \in K_{\text{Rand}}$  eine Randkante, so liegt  $k$  nur in einem Dreieck  $d$ . Realisieren wir  $d$  in  $\mathbf{E}$ , dann teile der Inkreisradius  $|k|$  wieder im Verhältnis  $x/y$ . Aus  $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0$  folgt dann  $x/y = 1$ . Der Inkreis teilt somit  $|k|$  im Verhältnis 1:1.

4.2. Wir nennen  $\psi \in W_{\text{Koh}}$  eine *immersierte Kreispackung* (siehe Figur 9) wenn  $\psi$  in  $W_{\text{Geo}}$  liegt und folgende Bedingungen erfüllt:

- Um jeden Eckpunkt  $e$  von  $P_\psi$  (Bezeichnungen wie in 2.7.) lässt sich ein Kreis  $C_e$  schlagen, der alle Kanten, die von  $e$  ausgehen, schneidet.
- Sind zwei Ecken  $e$  und  $e'$  durch eine Kante verbunden, so sollen sich die Kreise  $C_e$  und  $C_{e'}$  berühren.



FIGUR 9

Beispiel einer immersierten Kreispackung

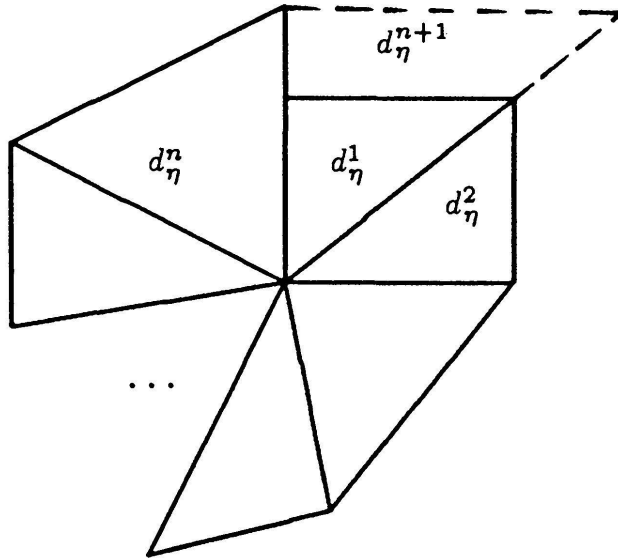
4.3. LEMMA. Für  $\eta \in W_{\text{Koh}}$  sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i)  $\eta$  ist eine immersierte Kreispackung,
- (ii)  $(DL_{\text{Koh}})_{\eta}(t_k) = 0, \forall k \in K_{\text{In}}$ .

*Beweis.* (i)  $\Rightarrow$  (ii): Sei  $\eta$  eine immersierte Kreispackung. Dann schneiden die Kreise  $C_e$  die Seiten der Dreiecke von  $P_{\eta}$  in den Berührungspunkten der Inkreise. Haben zwei Dreiecke von  $P_{\eta}$  eine gemeinsame Kante  $|k|$ , so fallen auf  $|k|$  die Berührungspunkte der Inkreise zusammen und es folgt  $(DL_{\text{Koh}})_{\eta}(t_k) = 0$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (i): Sei  $e$  ein innerer Eckpunkt und seien  $d^1, \dots, d^n$  die Dreiecke der Blume um  $e$  wobei  $d^i$  und  $d^{i+1}$  die Kante  $k_i$  gemeinsam haben. Wir realisieren erst  $d^1$  in  $\mathbf{E}$ . Dann realisieren wir die Dreiecke  $d^2, \dots, d^n$  so, dass  $d_{\eta}^i$  mit  $d_{\eta}^{i-1}$  genau die Kante  $|k_{i-1}|$  gemeinsam hat.

Sei  $d_\eta^{n+1}$  eine weitere Realisierung von  $d^1$ , welche aber mit  $d_\eta^n$  die Kante  $|k_n|$  gemeinsam hat. Da die Winkelsumme um jeden Eckpunkt  $2\pi$  beträgt, haben die Dreiecke  $d_\eta^n$  und  $d_\eta^{n+1}$  keinen inneren Punkt gemeinsam (siehe Figur 10).



FIGUR 10

Die Blume um einen inneren Eckpunkt

Wegen  $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_{k_i}) = 0$  berühren sich die Inkreise der Dreiecke  $d_\eta^i$  und  $d_\eta^{i+1}$ . Bezeichnen wir mit  $R_i$  den Inkreisradius des Dreiecks  $d_\eta^i$  und mit  $\alpha_i$  den Winkel von  $d_\eta^i$  der an die Ecke  $e$  stösst, dann folgt

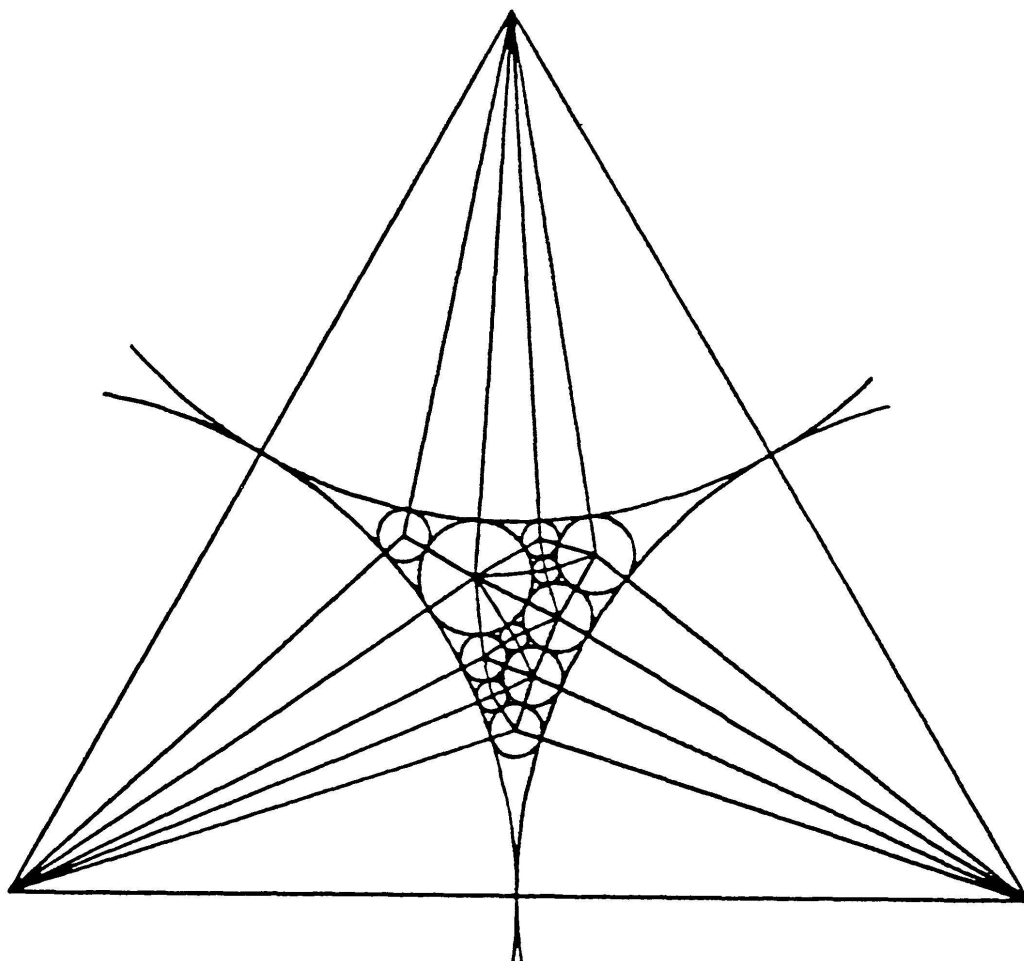
$$\frac{R_1}{R_{n+1}} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_2}{R_3} \cdots \frac{R_n}{R_{n+1}} = \frac{\tan(\alpha_1/2)}{\tan(\alpha_2/2)} \cdots \frac{\tan(\alpha_n/2)}{\tan(\alpha_1/2)} = 1.$$

Folglich fallen die Dreiecke  $d_\eta^1, d_\eta^{n+1}$  zusammen und die Blume um  $e$  schliesst sich. Da sich die Blume um jeden inneren Eckpunkt schliesst, ist  $\eta$  immersiert realisierbar. Haben zwei Dreiecke eine gemeinsame Kante, so berühren sich in  $P_\eta \subset \mathbf{E}$  ihre Inkreise. Wir können somit um jeden Eckpunkt von  $P_\eta$  einen Kreis schlagen, der die Kanten in den Berührungspunkten der Inkreise schneidet. Diese Kreise erfüllen die Kreispackungseigenschaft 4.2.  $\square$

4.4. SATZ. Für jedes Polyeder  $P$  mit  $|P|$  homöomorph zur Kreisscheibe existiert genau eine immersierte Kreispackung, bei der alle Randkreise gleich gross sind.

*Beweis.* Nimmt  $L_{\text{Koh}}$  das Maximum auf  $W_{\text{Koh}}$  in  $\eta$  an, so gilt  $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0 \forall k \in K$ , nur für  $\eta$ . Aus  $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0, \forall k \in K_{\text{In}}$  folgt die Kreispackungseigenschaft und wegen  $(DL_{\text{Koh}})_\eta(t_k) = 0 \forall k \in K_{\text{Rand}}$  sind alle Randkreise gleich gross.  $\square$

4.5. BEWEIS DES SATZES VON ANDREEV. Sei  $T$  eine Triangulierung der Sphäre  $S^2$  und  $e_1, e_2, e_3$  die Eckpunkte eines Dreiecks von  $T$ . Die Gruppe der Möbiustransformationen operiert dreifachtransitiv auf der Sphäre. Mit einer Möbiustransformation und anschliessender stereographischer Projektion können wir  $e_1, e_2, e_3$  auf die Eckpunkte eines gleichseitigen euklidischen Dreiecks so abbilden, dass alle andern Ecken von  $T$  im Inneren dieses Dreiecks liegen. Wir erhalten so eine Triangulierung eines gleichseitigen Dreiecks in  $\mathbf{E}$ . Nach Satz 4.4. existiert dann genau eine immersierte Kreispackung, deren Graphen das 1-Skelett einer Triangulierung eines wiederum gleichseitigen Dreiecks ist (alle drei Randkreise haben denselben Radius). Darum ist diese Kreispackung sogar in  $\mathbf{E}$  eingebettet (siehe Figur 11). Transformieren wir auf  $S^2$  zurück erhalten wir eine Kreispackung auf der Sphäre. Die Eindeutigkeit bis auf Möbiustransformation folgt aus der Eindeutigkeit im euklidischen Fall.



FIGUR 11

Kreispackung auf der Sphäre