Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: POLYNÔMES HOMOGÈNES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE

Autor: Maire, H.-M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59491

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'Enseignement Mathématique, t. 38 (1992), p. 219-232

POLYNÔMES HOMOGÈNES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE

par H.-M. MAIRE

RÉSUMÉ. Les niveaux et sous-niveaux d'un polynôme réel homogène de degré $m \geqslant 2$ avec gradient à singularité isolée en 0 (i.e., avec hessien non dégénéré) ont la même homologie que les niveaux et sous-niveaux d'une forme quadratique non dégénérée. L'existence de tels polynômes pour m pair $\geqslant 6$ avec hessien d'indice quelconque est établie. On montre par contre que le hessien de tout polynôme homogène de degré 4 en au moins 3 variables dont l'indice est différent de 0 et n en un point, dégénère en dehors de l'origine.

1. INTRODUCTION

Pour deux entiers $m, n \geqslant 2$, soit $H_n^{(m)}$ l'ensemble des polynômes réels P à n variables, homogènes de degré m dont le gradient $P' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ a une singularité isolée en 0, en d'autres termes, tels que la matrice hessienne

$$P''(x) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_j \partial x_k}(x) \right)_{1 \leqslant j, k \leqslant n}$$

est non dégénérée pour tout $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, c'est-à-dire

$$x \in \mathbf{R}^n, \quad \det P''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 . \tag{1}$$

Si P appartient à $H_n^{(m)}$, la relation d'Euler $P''(x)x = (m-1)P'(x)$ donne

$$x \in \mathbf{R}^n, \quad P'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 , \tag{2}$$

donc P a aussi une singularité isolée en 0. De plus, l'indice de Morse $\operatorname{ind} P''(x)$ (= nombre de valeurs propres négatives) de la forme quadratique

Mots-clés: fonction de Morse — hessien — singularités isolées.
Classification AMS: 14G30 - 57R.

$h \mapsto \langle P''(x)h \mid h \rangle$ est constant pour $x \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, car $n \geqslant 2$. Pour $0 \leqslant p \leqslant n$ et $q = n - p$, soit

$$H_{p,q}^{(m)} = \{P \in H_n^{(m)} \mid \operatorname{ind} P''(x) = p, \ \forall x \neq 0\} .$$

On a bien sûr: $H_n^{(m)} = \cup_{p=0}^{n} H_{p,q}^{(m)}$.

Quand $m = 2$, l'ensemble $H_{p,q}^{(2)}$ s'identifie à l'ensemble des formes quadratiques non dégénérées d'indice p sur $\mathbf{R}^n$. Mais si m est supérieur à 2, il n'est pas immédiat de trouver un polynôme homogène de degré m satisfaisant à (1), avec hessien *indéfini*. Les polynômes *harmoniques* sont de bons candidats si n est égal à 2 (cf. Exemple (2.1)), mais pas en dimension supérieure. En effet, H. Lewy [6], puis B. Segre [9] et V.E. Galafassi [4] ont montré qu'il n'existe pas de polynôme harmonique dans $H_n^{(m)}$ si $m > 2$ et $n > 2$.

Dans cet article, nous répondons aux questions suivantes:

Pour quelles valeurs de m, p et q, l'ensemble $H_{p,q}^{(m)}$ est-il non vide?

Pour P dans $H_{p,q}^{(m)}$, quel est le nombre de composantes connexes de $P^{-1}(0) \setminus \{0\}$?

Quels sont les nombres de Betti des variétés de niveaux de $P: \{P = \alpha\}$, respectivement des variétés de sous-niveaux de $P: \{P \leqslant \alpha\}$?

L'étude de $H_{p,q}^{(m)}$ est motivée par les résultats de Helffer-Nourrigat et de l'auteur sur l'hypoellipticité maximale du système de Cauchy-Riemann induit sur une hypersurface de $\mathbf{C}^{n+1}$, cf. [5] et [7]. Il est facile de vérifier que si $P \in H_{p,q}^{(m)}$ et $p, q \neq j$ alors l'hypersurface tubulaire de $\mathbf{C}^{n+1}$ définie par $\operatorname{Re} z_0 = P(\operatorname{Re} z_1, \ldots, \operatorname{Re} z_n)$ satisfait la condition de Derridj $D(j)$ qui est nécessaire pour l'hypoellipticité maximale de $\bar{\partial}_b$ sur les $(0, j)$-formes. La connectivité des sous-niveaux de P est utile pour montrer que $D(j)$ est aussi suffisante.

Le plan de l'article est le suivant. Au paragraphe 2, une liste d'exemples ou contre-exemples simples illustre les différents cas exceptionnels: $n = 2$, $p = 0$ ou $m = 4$ et génériques: $m \geqslant 6$. Les résultats principaux sont énoncés au paragraphe 3 et démontrés au paragraphe 4.

2. Exemples et cas particuliers

(2.1) Exemple. *Pour $m \geqslant 2$ le polynôme $P(x, y) = \operatorname{Re}(x + iy)^m$ appartient à $H_{1,1}^{(m)}$*

Preuve. Si $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe, les équations de Cauchy-Riemann donnent

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Re} f = \operatorname{Re}\frac{df}{dz}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Re} f = -\operatorname{Im}\frac{df}{dz},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}\frac{df}{dz}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}\frac{df}{dz}$$

et, par suite,

$$\det(\operatorname{Re} f)'' = -\left|\frac{d^2 f}{dz^2}\right|^2 .$$

Quand $f(z) = z^m$, le déterminant hessien de $\operatorname{Re} f$ est donc négatif, sauf en $z = 0$. □

(2.2) EXEMPLE. $P(x) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^k$, *pour* $k \geqslant 1$, *appartient à* $H_{0,n}^{(2k)}$.

Preuve. Par calcul direct, on trouve que $P''(x)$ vaut $2k\,|x|^{2k-4}$ fois

$$\begin{pmatrix} (2k-1)x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 & (2k-2)x_1x_2 & \cdots \\ (2k-2)x_1x_2 & x_1^2 + (2k-1)x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_n^2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Si $x = (1, 0, \ldots, 0)$, cette matrice est diagonale de valeurs propres $2k(2k-1)$, $2k, \ldots, 2k$. Comme P est invariant par toute transformation orthogonale et comme

$$(3) \qquad U \in GL(n, \mathbf{R}) \Rightarrow U^t P''(Ux)U = (P \circ U)''(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

les valeurs propres de $P''(x)$ sont

$$2k(2k-1)\,|x|^{2k-2}, 2k\,|x|^{2k-2}, \ldots, 2k\,|x|^{2k-2}. \qquad \square$$

(2.3) LEMME. *Pour* m *impair supérieur à* 2, *on a:*

$$H_{0,2}^{(m)} = H_{2,0}^{(m)} = \varnothing.$$

Preuve. Soit P un polynôme homogène de degré m et dénotons par $a \in \mathbf{S}^1$ (sphère unité de $\mathbf{R}^2$) un point où P atteint son maximum sur $\mathbf{S}^1$. La méthode des multiplicateurs de Lagrange et la relation d'Euler montrent que $P'(a) = mP(a)a$. Une seconde application de la relation d'Euler donne

$$P''(a)a = (m-1)P'(a) = m(m-1)P(a)a.$$

Ainsi a est vecteur propre de $P''(a)$ avec valeur propre $m(m-1)P(a)$. Si P appartient à $H_{2,0}^{(m)}$ alors cette valeur propre est négative et, par suite, $P(a)$ est négatif. Il s'ensuit que P est négatif en dehors de 0, donc m est pair. □

(2.4) PROPOSITION (A. Andreatta [1]). *Si* $k \geqslant 1$ *et* $n \geqslant 3$, *alors* $H_n^{(2k+1)} = \varnothing$.

Preuve. Si P est un polynôme homogène de degré impair alors P' est une application homogène de degré pair; elle est donc non injective. D'après la proposition (4.1), il s'ensuit que $P \notin H_n^{(2k+1)}$. □

(2.5) EXEMPLE. *L'ensemble* $H_{2,2}^{(4)}$ *ne contient pas de polynôme du type suivant:*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant 4} a_{jk} x_j^2 x_k^2 .$$

Preuve. Soit P un polynôme de ce type appartenant à $H_4^{(4)}$. Alors $P''(x)$ a pour matrice

$$\begin{pmatrix} 12a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_2^2 + 2a_{13}x_3^2 + 2a_{14}x_4^2 & \cdots & 4a_{14}x_1x_4 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 4a_{14}x_1x_4 & \cdots & 2a_{14}x_1^2 + 2a_{24}x_2^2 + 2a_{34}x_3^2 + 12a_{44}x_4^2 \end{pmatrix} .$$

Quand $x_4 = 0$, le déterminant de $P''(x)$ est un multiple de $Q(x_1, x_2, x_3) := 2a_{14}x_1^2 + 2a_{24}x_2^2 + 2a_{34}x_3^2$; d'après (1), la forme quadratique Q doit être définie et donc a_{14}, a_{24} et a_{34} ont le même signe. D'autre part, pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ et $x_4 = 1$, les valeurs propres de $P''(x)$ sont $2a_{14}, 2a_{24}, 2a_{34}$ et $12a_{44}$. Donc l'indice de $P''(0, 0, 0, 1)$ est différent de 2 et, par suite, le polynôme P n'appartient pas à $H_{2,2}^{(4)}$. □

Remarque. Il est facile de trouver des polynômes homogènes de degré pair dont la matrice hessienne a p valeurs propres $\leqslant 0$ et q valeurs propres $\geqslant 0$. En effet, $P(x) = -x_1^{2k} - \ldots - x_p^{2k} + x_{p+1}^{2k} + \ldots + x_n^{2k}$ pour k entier $\geqslant 1$ convient. Mais dès que k est supérieur à 1, $P \notin H_n^{(2k)}$. Une légère modification de cet exemple fournit un élément de $H_{1,2}^{(6)}$.

(2.6) EXEMPLE (A. Andreatta [2]). *Le polynôme*

$$P_\lambda = (x_1^2 + x_2^2 - x_3^2)(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4) + \lambda(x_1^6 + x_2^6 - x_3^6)$$

appartient à $H_{1,2}^{(6)}$ *pour* $\lambda \geqslant 2$.

Preuve. Soit $Q = P_2$. On a

$$Q''_{11} = 90x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 2x_2^4 - 12x_1^2x_3^2 + 2x_3^4,$$
$$Q''_{22} = 2x_1^4 + 12x_1^2x_2^2 + 90x_2^4 - 12x_2^2x_3^2 + 2x_3^4,$$
$$Q''_{33} = -2x_1^4 - 2x_2^4 + 12x_1^2x_3^2 + 12x_2^2x_3^2 - 90x_3^4,$$
$$Q''_{12} = 8x_1^3x_2 + 8x_1x_2^3, \quad Q''_{13} = -8x_1^3x_3 + 8x_1x_3^3, \quad Q''_{23} = -8x_2^3x_3 + 8x_2x_3^3 .$$

Comme $8x_1^2(x_1^2+x_2^2) \leqslant Q''_{11}$ et $8x_2^2(x_1^2+x_2^2) \leqslant Q''_{22}$, on a

$$(\sqrt{8x_1^2(x_1^2+x_2^2)}\, Q''_{23})^2 \leqslant Q''_{11}\, Q''^2_{23} \quad \text{et} \quad (\sqrt{8x_2^2(x_1^2+x_2^2)}\, Q''_{13})^2 \leqslant Q''_{22}\, Q''^2_{13}\,.$$

D'après l'inégalité $2ab \leqslant a^2+b^2$, il en découle

$$2Q''_{12}\, Q''_{13}\, Q''_{23} \leqslant Q''_{11}\, Q''^2_{23} + Q''_{22}\, Q''^2_{13}\,.$$

D'autre part, on vérifie que

$$Q''_{11} \geqslant 54x_1^4 + 2x_2^4 + x_3^4\,, \qquad Q''_{22} \geqslant 2x_1^4 + 54x_2^4 + x_3^4\,,$$
$$Q''_{33} \leqslant -x_1^4 - x_2^4 - 18x_3^4\,,$$

et, par conséquent,

$$Q''_{11}\, Q''_{22} - Q''^2_{12} \geqslant x_1^8 + x_2^8 + x_3^8\,.$$

En regroupant ces informations, on obtient

$$\det Q'' \leqslant (Q''_{11}\, Q''_{22} - Q''^2_{12})\, Q''_{33} \leqslant -(x_1^8+x_2^8+x_3^8)\,(x_1^4+x_2^4+18x_3^4)$$
$$< 0\,, \quad \text{si} \quad x \neq 0\,.$$

Pour $\lambda \geqslant 2$, on a, avec $\mu = 30(\lambda-2)$.

$$\begin{aligned}\det P''_\lambda = &-\mu^3 x_1^4 x_2^4 x_3^4 + \mu^2(x_1^4x_2^4Q''_{33} - x_1^4x_3^4Q''_{22} - x_2^4x_3^4Q''_{11})\\ &+ \mu(x_1^4(Q''_{22}\,Q''_{33} - Q''^2_{23}) + x_2^4(Q''_{11}\,Q''_{33} - Q''^2_{13}) - x_3^4(Q''_{11}Q''_{22} - Q''^2_{12}))\\ &+ \det Q''\,.\end{aligned}$$

Comme tous les coefficients de ce polynôme en μ sont négatifs ou nuls, le déterminant de P''_λ est négatif pour $\lambda \geqslant 2$ et $x \neq 0$. Il reste à observer que $P''_\lambda(0,0,1) = \operatorname{diag}(2, 2, -30(\lambda+1))$ pour pouvoir conclure que P_λ appartient à $H^{(6)}_{1,2}$. $\square$

L'exemple générique suivant est plus facile à calculer.

(2.7) EXEMPLE. *Pour tout* $k \geqslant 2$ *et quels que soient* $n \geqslant p \geqslant 0$, *le polynôme*

$$\begin{aligned}P(x) = &-(x_1^2+\ldots+x_p^2)^{k+1} + \varepsilon(x_1^2+\ldots+x_p^2)^k(x_{p+1}^2+\ldots+x_n^2)\\ &-\varepsilon(x_1^2+\ldots+x_p^2)\,(x_{p+1}^2+\ldots+x_n^2)^k + (x_{p+1}^2+\ldots+x_n^2)^{k+1}\end{aligned}$$

appartient à $H^{(2k+2)}_{p,q}$ *si* $\varepsilon > 0$ *est assez petit.*

Preuve. Puisque P est invariant par toute transformation linéaire qui conserve $(x_1^2+\ldots+x_p^2)$ et $(x_{p+1}^2+\ldots+x_n^2)$, d'après (3), il suffit de vérifier que

$$\det P''(x_1, 0, \ldots, 0, x_n) \neq 0 \quad \text{pour} \quad (x_1, x_n) \neq (0,0)\,.$$

Mais quand $x = (x_1, 0, \ldots, 0, x_n)$ les seules entrées non nulles de P'' sont

$$P''_{11} = -(2k+2)(2k+1)x_1^{2k} + 2\varepsilon k(2k-1)x_1^{2k-2}x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$
$$P''_{22} = \ldots = P_{pp} = -2(k+1)x_1^{2k} + 2\varepsilon k x_1^{2k-2}x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$
$$P''_{p+1,p+1} = \ldots = P_{n-1,n-1} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k x_1^2 x_n^{2k-2} + 2(k+1)x_n^{2k}$$
$$P''_{nn} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k(2k-1)x_1^2 x_n^{2k-2} + (2k+2)(2k+1)x_n^{2k}$$
$$P''_{1n} = P''_{n1} = 4\varepsilon k(x_1^{2k-1}x_n - x_1 x_n^{2k-1}) .$$

Par conséquent, en $(x_1, 0, \ldots, 0, x_n)$,

$$\det P'' = (P''_{11}P''_{nn} - (P''_{1n})^2)P''_{22} \ldots P''_{n-1,n-1} .$$

Pour ε assez petit on vérifie que $P''_{11}, \ldots, P''_{pp}$ sont négatifs et $P''_{p+1,p+1}, \ldots, P''_{nn}$ sont positifs pour $(x_1, 0, \ldots, 0, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ (cette affirmation est fausse pour $k = 1$, puisque dans ce cas $P''_{11} = -12x_1^2$ s'annule pour $x \neq 0$). Il s'ensuit que P'' a p valeurs propres négatives et q valeurs propres positives si $x \neq 0$. □

3. Enoncés des résultats

(3.1) Théorème. *Supposons* $m, n \geqslant 2$, $p = 0, \ldots, n$, $q = n - p$. *Alors l'ensemble* $H^m_{p,q}$ *est non vide si, et seulement si l'une des conditions suivantes a lieu:*

a) m *est impair et* $p = q = 1$;

b) $m = 2$;

c) $m = 4$ *et* $p = q = 1$ *ou* $p = 0$ *ou* $q = 0$;

d) m *est pair supérieur ou égal à* 6.

(3.2) Application. *Pour* m *pair* $\geqslant 6, n \geqslant 2$ *et* $p = 0, \ldots, n$, *il existe une hypersurface régulière* M *de classe* C^∞ *de* $\mathbf{R}^{n+1}$ *contenant* 0 *telle que la courbure de Gauss-Kronecker* $K(x)$ *de* M *en* x *vérifie*

(i) $K(x) \sim |x|^{n(m-2)}$, $x \to 0$.

(ii) *L'hypersurface* M *a* p *rayons de courbure principaux négatifs et* q *rayons de courbure principaux positifs en tout point voisin de* 0.

Il n'existe pas d'hypersurface avec ces propriétés si $m = 4$ *et* $p \neq 0$ *et* n.

(3.3) Théorème. *Soit* $P \in H^{(m)}_{p,q}$ *avec* $m \geqslant 2$ *et* $n = p + q \geqslant 3$. *Alors les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de* P *ont les mêmes*

nombres de Betti que les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de la forme quadratique $x \mapsto -x_1^2 \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 \dots + x_n^2$.

Remarque. La condition $n = p + q \geqslant 3$ est essentielle dans le théorème (3.3). En effet, dans l'exemple (2.1), le sous-niveau $\{P \leqslant 0\}$ a m composantes connexes.

(3.4) COROLLAIRE. *Si* P *appartient à* $H_n^{(m)}$ *avec* $n \geqslant 3$ *et* $m \geqslant 2$, *alors l'ensemble défini par* $P = 0$ *dans l'espace projectif réel est connexe.*

4. PREUVES

En dimension supérieure à 2, la proposition-clé suivante impose de sérieuses restrictions sur les polynômes de $H_{p,q}^{(m)}$. On va l'utiliser à plusieurs reprises dans la suite.

(4.1) PROPOSITION. *Si* $P \in H_n^{(m)}$ *avec* $n \geqslant 3$, *alors l'application* $P' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *est un homéomorphisme et sa restriction à* $\mathbf{R}^n \setminus 0$ *est un difféomorphisme.*

Preuve. Commençons par la deuxième affirmation. Soit $P \in H_n^{(m)}$; d'après (2), l'application $P' : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ envoie $\mathbf{R}^n \setminus 0$ dans lui-même. L'hypothèse (1) garantit que P' est un difféomorphisme local de $\mathbf{R}^n \setminus 0$ dans lui-même. Comme P' est homogène, l'application $\phi : \mathbf{S}^{n-1} \to \mathbf{S}^{n-1}$ donnée par $\phi(x) = P'(x) / |P'(x)|$ est aussi un difféomorphisme local et il suffit de montrer que ϕ est bijective. Or $\phi(\mathbf{S}^{n-1})$ est ouvert et fermé; donc ϕ est surjective. Par suite ϕ est un revêtement fini de $\mathbf{S}^{n-1}$. Puisque $n \geqslant 3$, $\mathbf{S}^{n-1}$ est simplement connexe si bien que ϕ est injective.

Pour vérifier la première affirmation, il suffit de remarquer que l'inverse de $P' \mid (\mathbf{R}^n \setminus 0)$ se prolonge continûment à $\mathbf{R}^n$. $\square$

Avant de commencer la preuve du théorème (3.3), donnons une version du lemme 8.6 p. 191 de [8] bien adaptée à notre situation.

(4.2) LEMME. *Si* $P \in H_{p,q}^{(m)}$ *avec* $m \geqslant 2$ *et* $n = p + q \geqslant 3$ *alors il existe une fonction de Morse* $\tilde{P} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ *avec un seul point critique d'indice* p *telle que:* $|x| \geqslant 1 \Rightarrow \tilde{P}(x) = P(x)$.

Preuve. Soit $\omega \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$ tel que $\omega(x) = 1$ si $|x| \leqslant 1/2$, $\omega(x) = 0$ si $|x| \geqslant 1$. Pour $a \in \mathbf{R}^n \setminus 0$, on pose

$$\tilde{P}(x) = P(x) - \omega(x) \langle x \mid a \rangle, \qquad x \in \mathbf{R}^n .$$

En dérivant, il vient

$$\tilde{P}'(x) = P'(x) - \omega'(x)\langle x \mid a\rangle - \omega(x)a$$

et donc

$$|\tilde{P}'(x)| \geqslant |P'(x)| - |\omega'(x)\|x\|a| - |\omega(x)\|a| .$$

Pour $|a|$ assez petit, il en résulte que

$$\inf_{1/2 \leqslant |x| \leqslant 1} |\tilde{P}'(x)| \geqslant 1/2 \inf_{1/2 \leqslant |x| \leqslant 1} |\tilde{P}'(x)| > 0 .$$

Quand $|x| \leqslant 1/2$, on a par construction $\tilde{P}'(x) = P'(x) - a$. Le seul point critique de $\tilde{P}$ est donc $b = (P')^{-1}(a)$. Quitte à prendre $|a|$ encore plus petit, on peut supposer $|b| \leqslant 1/2$, si bien que $\tilde{P}''(b) = P''(b)$. L'indice de Morse de $\tilde{P}$ en b vaut donc p. $\square$

Preuve du théorème (3.3). Les conditions de Palais-Smale (cf. [8] p. 179) sont satisfaites pour les fonctions P et $\tilde{P}$ du lemme (4.2) puisque

$$\inf_{|x| \geqslant 1} |\tilde{P}'(x)| = \inf_{|x| \geqslant 1} |P'(x)| > 0 .$$

Pour $\alpha \in \mathbf{R}$, notons

$$P^\alpha = \{x \in \mathbf{R}^n \mid P(x) \leqslant \alpha\} , \qquad \tilde{P}^\alpha = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \tilde{P}(x) \leqslant \alpha\}$$

les variétés de sous-niveaux de P et $\tilde{P}$ de hauteur α. Posons

$$\alpha_0 = \sup_{|x| \leqslant 1}(|P(x)| + |\tilde{P}(x)|) .$$

Puisque $\tilde{P}$ a un seul point critique d'indice p situé dans $\{|x| \leqslant 1\}$, on a (cf. [8] p. 188).

$$\dim H_k(\tilde{P}^\alpha, \tilde{P}^{-\alpha}) = \delta_{k,p} \quad k = 0, \ldots, n, \quad \alpha \geqslant \alpha_0 ,$$

où H_k désigne le k-ième groupe d'homologie à coefficients réels de la paire et $\delta_{k,p}$ est le symbole de Kronecker. Mais, pour $\alpha \geqslant \alpha_0$, $\tilde{P}^\alpha = P^\alpha$ et $\tilde{P}^{-\alpha} = P^{-\alpha}$. Donc

$$\dim H_k(P^\alpha, P^{-\alpha}) = \delta_{k,p}, \qquad k = 0, \ldots, n, \qquad \alpha \geqslant \alpha_0 .$$

En utilisant maintenant les lemmes 8.3 p. 181 et 8.4 p. 183 de [8], on obtient que P^α est rétracte fort par déformation de $\mathbf{R}^n$, pour $\alpha \geqslant 0$, et $P^{-\alpha}$ est rétracte fort par déformation de $P^0 \setminus 0$, pour $\alpha > 0$. D'où, pour $k = 0, \ldots, n$:

$$\begin{aligned} \dim H_k(P^\alpha) &= \dim H_k(P^0) = \delta_{k,0}, & \alpha \geqslant 0 , \\ \dim H_k(P^{-\alpha}) &= \dim H_k(P^0 \setminus 0), & \alpha > 0 , \\ \dim H_k(P^0, P^0 \setminus 0) &= \delta_{k,p} . \end{aligned} \tag{4}$$

La suite exacte longue d'homologie de la paire $(P^0, P^0\setminus 0)$ s'écrit

$$0 \to H_n(P^0\setminus 0) \to H_n(P^0) \to H_n(P^0, P^0\setminus 0) \to H_{n-1}(P^0\setminus 0) \to \dots$$
$$\dots \to H_1(P^0\setminus 0) \to H_1(P^0) \to H_1(P^0, P^0\setminus 0) \to$$
$$\to H_0(P^0\setminus 0) \to H_0(P^0) \to H_0(P^0, P^0\setminus 0) \to 0 .$$

Lorsque $p = 0$, elle se réduit à

$$0 \to H_n(P^0\setminus 0) \to 0 \to \dots \to 0 \to H_0(P^0\setminus 0) \to \mathbf{R} \to \mathbf{R} \to 0 ,$$

si bien que $\dim H_k(P^0\setminus 0) = 0, \forall k$. Pour $p = 1$, elle se réduit à

$$\dots \to 0 \to H_1(P^0\setminus 0) \to 0 \to \mathbf{R} \to H_0(P^0\setminus 0) \to \mathbf{R} \to 0 .$$

D'où $\dim H_0(P^0\setminus 0) = 2$ et $\dim H_k(P^0\setminus 0) = 0$ si $k > 0$. Pour $p > 1$, on trouve $\dim H_k(P^0\setminus 0) = 0$ si $k \neq p - 1$ ou 0, $= 1$ sinon. En résumé,

$$\dim H_k(P^0\setminus 0) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = 0 , \\ \delta_{k,p-1} + \delta_{k,0} & \text{si} \quad p > 0 . \end{cases}$$

Pour la forme quadratique d'indice de Morse p, les relations (4) ont aussi lieu. D'où le résultat sur les variétés de sous-niveaux.

Les nombres de Betti des variétés de niveaux de P peuvent être calculés avec la suite de Mayer-Vietoris. En effet, les relations

$$P^{-1}(\alpha) = P^\alpha \cap (-P)^{-\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}^n = P^\alpha \cup (-P)^{-\alpha}, \quad \alpha \in \mathbf{R} ,$$

donnent des suites exactes

$$0 \to H_k(P^{-1}(\alpha)) \to H_k(P^\alpha) \oplus H_k((-P)^{-\alpha}) \to 0, \quad \text{pour} \quad k > 0 ,$$
$$0 \to H_0(P^{-1}(\alpha)) \to H_0(P^\alpha) \oplus H_0((-P)^{-\alpha}) \to \mathbf{R} \to 0 .$$

Donc

$$\dim H_k(P^{-1}(\alpha)) = \dim H_k(P^\alpha) + \dim H_k((-P)^{-\alpha}), \quad \text{pour} \quad k > 0 ,$$
$$\dim H_0(P^{-1}(\alpha)) = \dim H_0(P^\alpha) + \dim H_0((-P)^{-\alpha}) - 1 .$$

Ces relations ont aussi lieu pour la forme quadratique d'indice p, d'où le résultat sur les niveaux de P. □

(4.3) *Remarque.* La preuve ci-dessus montre que les conclusions du théorème (3.3) ont lieu lorsque P est une fonction de Morse sur $\mathbf{R}^n$ ayant un seul point critique d'indice p et satisfaisant les conditions de Palais-Smale.

Preuve du corollaire (3.4). Remarquons d'abord que $V := P^{-1}(0) \cap \mathbf{S}^{n-1}$ est une sous-variété lisse de dimension $n - 2$ de $\mathbf{S}^{n-1}$ puisque si x^0 est

un point critique de $P \mid \mathbf{S}^{n-1}$, alors $P'(x^0) = \lambda x^0$, avec $\lambda \neq 0$ d'après (2), donc $P(x^0) \neq 0$ par Euler. De plus, l'intersection de V avec tout hémisphère ouvert est dense dans l'intersection de V avec l'adhérence de cet hémisphère. En effet, dans le cas contraire, V aurait une composante V_1 contenue dans un équateur de $\mathbf{S}^{n-1}$; pour raison de dimension, V_1 serait égal à cet équateur et ceci est absurde car P ne peut s'annuler identiquement sur un hyperplan vectoriel. Le corollaire sera donc démontré si on vérifie que l'intersection de V avec un hémisphère ouvert est connexe.

Si $p = n$, un argument semblable à celui de la démonstration du lemme (2.3) montre que $\sup_{|x|=1} P(x) < 0$. Donc V est vide.

Si p est compris entre 2 et $n-1$, soit $a \in \mathbf{S}^{n-1}$ tel que $\sup_{|x|=1} P(x) = P(a)$. Comme au lemme (3.2), il vient que a est un vecteur propre de $P''(a)$ avec valeur propre positive. Puisque P' est bijective, la fonction $P \mid (a + a^{\perp})$ a un unique point critique en a; c'est donc une fonction de Morse avec un seul point critique d'indice p et qui satisfait les conditions de Palais-Smale. La remarque (4.3) s'applique et donne que $P^{-1}(0) \cap (a + a^{\perp})$ est connexe ($p > 1$). Sa projection sur $\mathbf{S}^{n-1}$ est l'intersection de V avec un hémisphère ouvert. Le corollaire est donc démontré dans ce cas.

Si $p = 1$ ou 0, on raisonne avec $-P$. □

(4.4) PROPOSITION. *Si* $P \in H^{(m)}_{p,q}$ *et* $q \geqslant 1$, *alors il existe un* $(p+q-1)$-*plan vectoriel* π *tel que* $P \mid \pi \in H^{(m)}_{p,q-1}$.

Preuve. Si $p = 0$, il n'y a rien à démontrer, car la restriction d'une forme quadratique définie positive à un hyperplan est définie positive.

Supposons dorénavant $p \geqslant 1$. Pour tout p-plan vectoriel σ de $\mathbf{R}^n$ et $x \in \sigma$, soit $\lambda_p(x, \sigma)$ la plus grande valeur propre de $P''(x) \mid \sigma$. Supposons que

$$\inf_{\sigma \in G(n,p)} \ \sup_{|x|=1,\ x \in \sigma} \lambda_p(x, \sigma) \geqslant 0 , \tag{5}$$

où $G(n, p)$ est la grassmannienne des p-plans vectoriels de $\mathbf{R}^n$. Soient σ^0 et $x^0 \in \sigma^0$ des éléments qui réalisent le membre de gauche de (5). Comme $P''(x^0)$ a au moins une valeur propre négative, il existe des p-plans σ arbitrairement voisins de σ^0 tels que $\lambda_p(x^0, \sigma) < \lambda_p(x^0, \sigma^0)$. La relation (5) n'a donc pas lieu et il existe un p-plan σ tel que $\lambda_p(x, \sigma) < 0$ si $|x| = 1$ et $x \in \sigma$.

Soit π un hyperplan de $\mathbf{R}^n$ qui contient σ. Puisque les valeurs propres de $P''(x) \mid \pi$ et $P''(x) \mid \sigma$ sont entrelacées (cf. [3] p. 149), $P''(x) \mid \pi$ a au moins p valeurs propres négatives pour $x \in \pi \setminus 0$; de même, en comparant $P''(x)$ et $P''(x) \mid \pi$, on obtient que $P''(x) \mid \pi$ a au moins $q-1$ valeurs propres positives. Donc $P \mid \pi \in H^{(m)}_{p,q-1}$. □

Preuve du Théorème (3.1).

a) Si $H_{p,q}^{(2k+1)}$ est non vide, alors la proposition (2.4) entraîne $n = 2$. D'après le lemme (2.3), il faut que $p = q = 1$.

L'exemple (2.1) démontre l'implication en sens inverse.

b) Ce cas est trivial.

c) Compte tenu des exemples (2.1), (2.2) et de la proposition (4.4), on peut supposer $q = 1$ et $n > 2$. On procède par l'absurde en supposant qu'il existe $P \in H_{n-1,1}^{(4)}$. Soient

$$\lambda_1(x) > 0 > \lambda_2(x) \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n(x) , \qquad x \in \mathbf{R}^n \setminus 0 ,$$

les valeurs propres de $P''(x)$. Pour $\alpha \geqslant 0$, on définit

$$P_\alpha(x) = P(x) - \alpha(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^2 .$$

D'après les inégalités de Weyl (cf. [3] p. 157), les valeurs propres $\lambda_{\alpha,j}$ de $(P_\alpha)''$ satisfont

$$\lambda_j(x) - 4\alpha\,|x|^2 \geqslant \lambda_{\alpha,j}(x) \geqslant \lambda_j(x) - 12\alpha\,|x|^2 , \qquad 1 \leqslant j \leqslant n .$$

Il existe donc $\alpha > 0$ et $a \in \mathbf{R}^n$ tels que

$$\lambda_{\alpha,1} \geqslant 0 > \lambda_{\alpha,2} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{\alpha,n} \quad \text{et} \quad \lambda_{\alpha,1}(a) = 0 . \tag{6}$$

Le polynôme P_α est noté Q dorénavant. Deux cas peuvent se présenter.

1) $Q''(a)a = 0$.

Par un changement linéaire de coordonnées, on se ramène à $a = (0, \ldots, 0, 1)$. L'hypothèse donne $Q''_{jn}(a) = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$, si bien que

$$Q(x) = A(x') + B(x')x_n + C(x')x_n^2 , \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) ,$$

où A [resp. B] est homogène de degré 4 [resp. 3] et C est une forme quadratique définie négative.

Le polynôme $Q_\varepsilon(x) = Q(x) + \varepsilon(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^2$ appartient à $H_{n-1,1}^{(4)}$, pour $\varepsilon > 0$ assez petit (inégalités de Weyl) et on a

$$Q_\varepsilon(x) = A_\varepsilon(x') + B(x')x_n + C_\varepsilon(x')x_n^2 + \varepsilon x_n^4 ,$$

avec A_ε homogène de degré 4 et C_ε uniformément définie négative. Pour $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$, $|x'| = 1$, l'équation $\dfrac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_n}(x', x_n) = 0$ admet 3 solutions réelles distinctes si ε est assez petit car $\dfrac{\partial^2 Q_\varepsilon}{\partial x_n^2}$ s'annule en $x_n^\pm = \pm\sqrt{-C_\varepsilon(x')/6\varepsilon}$

et $\dfrac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_n}(x', x_n^-) > 0$, $\dfrac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_n}(x', x_n^+) < 0$. Soient $y_1(x') < y_2(x') < y_3(x')$ ces solutions; l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{n-2} &\to \mathbf{S}^{n-2} \\ x' &\mapsto (Q_\varepsilon)'(x', y_1(x'))/\,|(Q_\varepsilon)'(x', y_1(x'))| \end{aligned}$$

est continue injective. Son degré topologique vaut donc ± 1 et par suite, elle est aussi surjective. Il en est de même pour $y_1(x')$ remplacé par $y_2(x')$. On a donc obtenu une contradiction avec l'injectivité de $(Q_\varepsilon)'$.

2) $Q''(a)b = 0$ pour $a, b \in \mathbf{R}^n$ linéairement indépendants.

Par un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer $a = (0, \ldots, 0, 1)$ et $b = (1, 0, \ldots, 0)$. L'hypothèse donne $Q''_{1j}(a) = 0$, pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Puisque la matrice $(Q''_{jk}(a))_{2 \leqslant j, k \leqslant n}$ a toutes ses valeurs propres négatives, on peut supposer, après multiplication de Q par un scalaire positif que $Q''_{nn}(a) = -12$. Il existe un dernier changement linéaire de coordonnées $x = U\tilde{x}$ de la forme $x_1 = \tilde{x}_1, x_j = \sum_2^{n-1} u_{jk}\tilde{x}_k, x_n = \tilde{x}_n + \sum_2^{n-1} u_k\tilde{x}_k$, tel que $\tilde{Q}(\tilde{x}) := Q(U\tilde{x})$ satisfait $\tilde{Q}''(a) = \operatorname{diag}(0, -2, \ldots, -2, -12)$. En laissant tomber les tildes, on est arrivé à la forme suivante:

$$Q(x) = A(x') + B(x')x_n + C(x'')x_n^2 - x_n^4\,, \qquad x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})\,,$$
$$x'' = (x_2, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Développons $\det Q''(x', 1)$ près de $x' = 0$:

$$\det Q''(x', 1) = \det \begin{pmatrix} B''_{11}(x') & 0 & 0 \\ 0 & C'' & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} + O(|x'|^2), \qquad x' \to 0\,.$$

Puisque $\det Q''$ ne change pas de signe d'après (6), il faut que B''_{11} soit identiquement nul. Les relations d'Euler $6B'_j(1, 0, \ldots, 0) = B'''_{j11}(1, 0, \ldots, 0)$ pour $1 \leqslant j \leqslant n-1$ montrent que

$$B(1, 0, \ldots, 0) = B'_j(1, 0, \ldots, 0) = 0\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n-1\,. \tag{7}$$

Comme plus haut, pour $\varepsilon > 0$, soit $Q_\varepsilon(x) = Q(x) + \varepsilon(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^2$. Maintenant,

$$Q_\varepsilon(x) = A_\varepsilon(x') + B(x')x_n + C_\varepsilon(x')x_n^2 - (1-\varepsilon)x_n^4\,,$$

avec $C_\varepsilon(x') = 2\varepsilon x_1^2 - (1 - 2\varepsilon)\,(x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)$. En particulier et d'après (7)

$$\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_1}(1, 0, \ldots, 0, x_n) = \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_1}(1, 0, \ldots, 0) + 4\varepsilon x_n^2 ,$$

$$\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_j}(1, 0, \ldots, 0, x_n) = \frac{\partial A_\varepsilon}{\partial x_j}(1, 0, \ldots, 0) , \qquad 2 \leqslant j \leqslant n - 1 ,$$

$$\frac{\partial Q_\varepsilon}{\partial x_n}(1, 0, \ldots, 0, x_n) = 4\varepsilon x_n - 4(1 - \varepsilon)x_n^3 .$$

Par suite,

$$(Q_\varepsilon)'(1, 0, \ldots, 0, -\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)}) = (Q_\varepsilon)'(1, 0, \ldots, 0, +\sqrt{\varepsilon/(1-\varepsilon)}) .$$

On est de nouveau en contradiction avec l'injectivité de $(Q_\varepsilon)'$.

d) L'exemple (2.7) montre que $H_{p,q}^{(m)}$ est non vide pour m pair supérieur ou égal à 6. □

Preuve de l'application (3.2). Il suffit de prendre $P \in H_{p,q}^{(m)}$ et M de la forme

$$\{(x, P(x)) \mid x \in \mathbf{R}^n\} .$$

En effet, la courbure de Gauss-Kronecker est un multiple positif du déterminant hessien de P (cf. [10], p. 93).

Réciproquement, si M est une hypersurface régulière de $\mathbf{R}^{n+1}$ avec (i) et (ii), alors M est localement le graphe de $f: U \to \mathbf{R}$ avec U ouvert de $\mathbf{R}^n$ contenant 0. On peut supposer $f(0) = 0$ et $f'(0) = 0$ sans changer la courbure. Développons f en parties homogènes:

$$f(x) = P(x) + O(|x|^{j+1}) , \qquad x \to 0 ,$$

où P est un polynôme homogène de degré $j \geqslant 2$. On a:

$$K((x, f(x)) = h(x) \det P''(x) + O(|x|^{n(j-1)}) , \qquad x \to 0 ,$$

avec $h(0) > 0$. La condition (i) entraîne $j = m$ et $\det P''(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$ (on a utilisé $|(x, f(x))| \sim |x|$). Donc $P \in H_n^{(m)}$ et (ii) donne $P \in H_{p,q}^{(m)}$. D'après le théorème (3.1), ceci n'est pas possible si $m = 4$ et $p \neq 0$ et n. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREATTA, A. Superficie algebriche di S_3 reali e con hessiana priva di punti reali. *Boll. U. Mat. It. 15* (1960), 424-430.

[2] —— Communication personnelle.

[3] FRANKLIN, J.N. *Matrix Theory*. Prentice-Hall, 1968.

[4] GALAFASSI, V.E. Forme reali armoniche. *Instituto Lombardo 90* (1956), 383-412.

[5] HELFFER, B. et J. NOURRIGAT. *Hypoellipticité maximale pour des Opérateurs Polynômes de Champs de Vecteurs.* Progress in Math., Birkhäuser, 1985.

[6] LEWY, H. A property of spherical harmonics. *American Journal of Math. 69* (1938), 555-560.

[7] MAIRE, H.-M. Necessary and sufficient condition for maximal hypoellipticity of $\bar{\partial}_b$. In *Springer Lecture Notes 1324,* Berlin 1988, 178-185.

[8] MAWHIN, J. and M. WILLEM. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems.* Springer, 1989.

[9] SEGRE, B. Questioni di realtà sulle forme armoniche e sulle loro hessiane. *Rend. Acc. Lincei 15* (1953), 237-242, 344-399.

[10] THORPE, J.A. *Elementary Topics in Differential Geometry.* Springer, 1979.

(Reçu le 25 juin 1991)

Henri-Michel Maire

Section de Mathématiques
2-4, rue du Lièvre
Case postale 240
CH-1211 Genève 24