

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** POLYNÔMES HOMOGÈNES RÉELS AVEC GRADIENT À SINGULARITÉ ISOLÉE  
**Kapitel:** 3. Enoncés des résultats  
**Autor:** Maire, H.-M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59491>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

$$P''_{11} = - (2k + 2) (2k + 1) x_1^{2k} + 2\varepsilon k (2k - 1) x_1^{2k-2} x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$

$$P''_{22} = \dots = P''_{pp} = - 2(k + 1) x_1^{2k} + 2\varepsilon k x_1^{2k-2} x_n^2 - 2\varepsilon x_n^{2k}$$

$$P''_{p+1,p+1} = \dots = P''_{n-1,n-1} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k x_1^2 x_n^{2k-2} + 2(k + 1) x_n^{2k}.$$

$$P''_{nn} = 2\varepsilon x_1^{2k} - 2\varepsilon k (2k - 1) x_1^2 x_n^{2k-2} + (2k + 2) (2k + 1) x_n^{2k}$$

$$P''_{1n} = P''_{n1} = 4\varepsilon k (x_1^{2k-1} x_n - x_1 x_n^{2k-1}).$$

Par conséquent, en  $(x_1, 0, \dots, 0, x_n)$ ,

$$\det P'' = (P''_{11} P''_{nn} - (P''_{1n})^2) P''_{22} \dots P''_{n-1,n-1}.$$

Pour  $\varepsilon$  assez petit on vérifie que  $P''_{11}, \dots, P''_{pp}$  sont négatifs et  $P''_{p+1,p+1}, \dots, P''_{nn}$  sont positifs pour  $(x_1, 0, \dots, 0, x_n) \neq (0, \dots, 0)$  (cette affirmation est fautive pour  $k = 1$ , puisque dans ce cas  $P''_{11} = -12x_1^2$  s'annule pour  $x \neq 0$ ). Il s'ensuit que  $P''$  a  $p$  valeurs propres négatives et  $q$  valeurs propres positives si  $x \neq 0$ .  $\square$

### 3. ENONCÉS DES RÉSULTATS

(3.1) THÉORÈME. *Supposons  $m, n \geq 2$ ,  $p = 0, \dots, n$ ,  $q = n - p$ . Alors l'ensemble  $H_{p,q}^m$  est non vide si, et seulement si l'une des conditions suivantes a lieu:*

- a)  $m$  est impair et  $p = q = 1$ ;
- b)  $m = 2$ ;
- c)  $m = 4$  et  $p = q = 1$  ou  $p = 0$  ou  $q = 0$ ;
- d)  $m$  est pair supérieur ou égal à 6.

(3.2) APPLICATION. *Pour  $m$  pair  $\geq 6$ ,  $n \geq 2$  et  $p = 0, \dots, n$ , il existe une hypersurface régulière  $M$  de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}^{n+1}$  contenant 0 telle que la courbure de Gauss-Kronecker  $K(x)$  de  $M$  en  $x$  vérifie*

$$(i) \quad K(x) \sim |x|^{n(m-2)}, \quad x \rightarrow 0.$$

(ii) *L'hypersurface  $M$  a  $p$  rayons de courbure principaux négatifs et  $q$  rayons de courbure principaux positifs en tout point voisin de 0.*

*Il n'existe pas d'hypersurface avec ces propriétés si  $m = 4$  et  $p \neq 0$  et  $n$ .*

(3.3) THÉORÈME. *Soit  $P \in H_{p,q}^{(m)}$  avec  $m \geq 2$  et  $n = p + q \geq 3$ . Alors les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de  $P$  ont les mêmes*

nombres de Betti que les variétés de niveaux [resp. de sous-niveaux] de la forme quadratique  $x \mapsto -x_1^2 \dots - x_p^2 + x_{p+1}^2 \dots + x_n^2$ .

*Remarque.* La condition  $n = p + q \geq 3$  est essentielle dans le théorème (3.3). En effet, dans l'exemple (2.1), le sous-niveau  $\{P \leq 0\}$  a  $m$  composantes connexes.

(3.4) COROLLAIRE. Si  $P$  appartient à  $H_n^{(m)}$  avec  $n \geq 3$  et  $m \geq 2$ , alors l'ensemble défini par  $P = 0$  dans l'espace projectif réel est connexe.

#### 4. PREUVES

En dimension supérieure à 2, la proposition-clé suivante impose de sérieuses restrictions sur les polynômes de  $H_{p,q}^{(m)}$ . On va l'utiliser à plusieurs reprises dans la suite.

(4.1) PROPOSITION. Si  $P \in H_n^{(m)}$  avec  $n \geq 3$ , alors l'application  $P': \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  est un homéomorphisme et sa restriction à  $\mathbf{R}^n \setminus 0$  est un difféomorphisme.

*Preuve.* Commençons par la deuxième affirmation. Soit  $P \in H_n^{(m)}$ ; d'après (2), l'application  $P': \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  envoie  $\mathbf{R}^n \setminus 0$  dans lui-même. L'hypothèse (1) garantit que  $P'$  est un difféomorphisme local de  $\mathbf{R}^n \setminus 0$  dans lui-même. Comme  $P'$  est homogène, l'application  $\phi: \mathbf{S}^{n-1} \rightarrow \mathbf{S}^{n-1}$  donnée par  $\phi(x) = P'(x) / |P'(x)|$  est aussi un difféomorphisme local et il suffit de montrer que  $\phi$  est bijective. Or  $\phi(\mathbf{S}^{n-1})$  est ouvert et fermé; donc  $\phi$  est surjective. Par suite  $\phi$  est un revêtement fini de  $\mathbf{S}^{n-1}$ . Puisque  $n \geq 3$ ,  $\mathbf{S}^{n-1}$  est simplement connexe si bien que  $\phi$  est injective.

Pour vérifier la première affirmation, il suffit de remarquer que l'inverse de  $P' | (\mathbf{R}^n \setminus 0)$  se prolonge continûment à  $\mathbf{R}^n$ .  $\square$

Avant de commencer la preuve du théorème (3.3), donnons une version du lemme 8.6 p. 191 de [8] bien adaptée à notre situation.

(4.2) LEMME. Si  $P \in H_{p,q}^{(m)}$  avec  $m \geq 2$  et  $n = p + q \geq 3$  alors il existe une fonction de Morse  $\tilde{P} \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$  avec un seul point critique d'indice  $p$  telle que:  $|x| \geq 1 \Rightarrow \tilde{P}(x) = P(x)$ .

*Preuve.* Soit  $\omega \in C_c^\infty(\mathbf{R}^n)$  tel que  $\omega(x) = 1$  si  $|x| \leq 1/2$ ,  $\omega(x) = 0$  si  $|x| \geq 1$ . Pour  $a \in \mathbf{R}^n \setminus 0$ , on pose

$$\tilde{P}(x) = P(x) - \omega(x) \langle x | a \rangle, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$