

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Band: 38 (1992)
Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES
D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS

Kapitel: 1. Enoncé des résultats

Autor: Guillou, L. / Marin, A.

DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-59492>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 07.10.2024

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

démonstration dans le cadre analytique (bien que le «triangle exact» de Floer ([F2]) s'en approche).

Casson a exposé ses résultats au printemps 1985 dans trois conférences célèbres au MRSI de Berkeley qui ont traversé l'Atlantique sous la forme des notes prises par S. Akbulut, K. Millett, R. Edwards. A l'automne 1985 un manuscrit de A. Marin décrivant l'approche de Casson a circulé. Au printemps 1990, le Séminaire suisse du troisième cycle romand de mathématique fut consacré en grande partie aux travaux de Casson et de Walker. Le présent article est donc une version remaniée et étendue du manuscrit de 1985 qui a bénéficié des exigences des participants du Séminaire suisse. Nous remercions chaleureusement C. Lescop pour son aide à propos des points les plus délicats et C. Danthony pour l'aide qu'il a apporté à la confection des figures.

Ce texte n'existerait certainement pas si A. Haefliger et C. Weber n'avaient pas invité L. Guillou et C. Lescop à participer au Séminaire suisse. C'est avec plaisir que nous les remercions ici.

Signalons enfin qu'une autre rédaction détaillée due à S. Akbulut et J. M. Mc Carthy est parue récemment ([AMcC]) et que le Bourbaki d'A. Marin ([M]) peut servir de première introduction à ce sujet.

Note. Sauf mention explicite du contraire, toutes les sphères d'homologie M considérées ici seront des sphères d'homologie entière, c'est-à-dire que $H_*(M; \mathbf{Z}) = H_*(S^3; \mathbf{Z})$.

1. ENONCÉ DES RÉSULTATS

Soit K un nœud (non orienté) dans une sphère d'homologie orientée M de dimension trois; quand il peut y avoir ambiguïté sur la sphère d'homologie ambiante on note un tel nœud par $(K \subset M)$. Pour $n \in \mathbf{Z}$ on désigne par (M, K_n) , ou seulement K_n s'il n'y a pas de risque de confusion, la sphère d'homologie obtenue par chirurgie de Dehn de coefficient $1/n$ sur le nœud K . Rappelons la définition de cette chirurgie de Dehn. Si V est un voisinage régulier fermé de K , notons $T = \partial V$ et soient m et l (méridien et longitude) des générateurs des noyaux des flèches $H_1(T; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(V; \mathbf{Z})$ et $H_1(T; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(M \setminus \overset{\circ}{V}; \mathbf{Z})$ respectivement. On peut représenter m et l par des courbes fermées simples sur T (encore notées m et l) qui se coupent transversalement en un point. On les oriente de sorte que le nombre d'intersection de l et m soit $+1$ si T est orienté comme bord de $M \setminus \overset{\circ}{V}$ (voir le §3.A pour nos conventions d'orientation). Alors $(M, K_n) = K_n$ est obtenue en choisissant un difféomorphisme $\varphi: \partial(S^1 \times D^2) \rightarrow T$ tel que $\varphi(1 \times \partial D^2)$ soit homologue à

$m + nl$ et en recollant selon $\varphi: K_n = S^1 \times D^2 \cup_{\varphi} (M \setminus \overset{\circ}{V})$. On vérifie que le résultat ne dépend pas des différents choix effectués et que K_n est une sphère d'homologie. Il est aussi facile de voir que $K_0 = M$ et que si K borde un disque dans M alors $K_n = M$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$ (cf. [Rf] Ch. 9). On désigne par \mathcal{S} l'ensemble des classes de difféomorphisme orienté des sphères d'homologie orientées de dimension trois.

1.1. *Définition.* Un nombre de Casson est une application $\lambda: \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Z}$ telle que $0) \lambda(S^3) = 0$,

1) $\lambda(K_{n+1}) - \lambda(K_n)$ est indépendant de n : c'est donc un invariant du nœud K noté $\lambda'(K)$ ou plus précisément $\lambda'(K \subset M)$ s'il y a risque de confusion.

Si (K, L, \dots, Z) est un entrelacs dans une sphère d'homologie M et $k, l, \dots, z \in \mathbf{Z}$ on note (K_k, L_l, \dots, Z_z) la sphère d'homologie obtenue en faisant successivement une chirurgie de Dehn de coefficient $1/k$ sur le nœud K dans M puis une chirurgie de Dehn de coefficient $1/l$ sur le nœud L dans K_k (et non dans M) etc... Cependant dans le cas où tous les nombres d'enlacements entre les composantes de l'entrelacs sont nuls, la sphère d'homologie obtenue est indépendante de l'ordre dans lequel les chirurgies ont été faites (cf. l'argument au début de la démonstration du lemme 2.1).

Soit alors (K, L) un entrelacs à nombre d'enlacement zéro dans une sphère d'homologie M . Si λ est un nombre de Casson la propriété 1) exigée dans la définition donne que

$$\begin{aligned}
 \lambda(K_{k+1}, L_{l+1}) - \lambda(K_k, L_{l+1}) - \lambda(K_{k+1}, L_l) + \lambda(K_k, L_l) \\
 &= \lambda'(K \subset L_{l+1}) - \lambda'(K \subset L_l) \\
 &= \lambda'(L \subset K_{k+1}) - \lambda'(L \subset K_k)
 \end{aligned}$$

est indépendant de k et de l ; c'est un invariant de l'entrelacs (K, L) noté $\lambda''(K, L)$.

1.2. *Définition.* Un nombre de Casson est *bon* si:

2) Pour tout entrelacs bord (K, L) (i.e. K et L bordent des surfaces de Seifert disjointes) on a: $\lambda''(K, L) = 0$.

1.3. PROPOSITION. *S'il existe un bon nombre de Casson il est unique au coefficient $\lambda'(T)$ près, où T désigne le nœud de trèfle. De plus on a:*

3) (Formule de chirurgie) Pour tout nœud K on a

$$\lambda'(K) = \frac{1}{2} \Delta_K''(1) \cdot \lambda'(T).$$

4) λ change de signe avec l'orientation: $\lambda(-M) = -\lambda(M)$.

5) λ est additif pour la somme connexe: $\lambda(M \# N) = \lambda(M) + \lambda(N)$.

6) $\lambda(M) = \rho(M)\lambda'(T) \bmod 2\lambda'(T)$ où $\rho(M)$ est l'invariant de Rohlin de M .

1.4. *Remarque.* Dans la formule 3):

a) $\Delta_K(t)$ est le polynôme d'Alexander normalisé de K : $\Delta_K(1) = +1$ et

$$\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t). \quad \text{Si } \Delta_K(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t^i + t^{-i}) \quad \text{on a } \frac{1}{2}\Delta_K''(1) = \sum_{i=1}^n i^2 a_i$$

(cf. appendice A).

b) Il est indifférent que ce soit T^g le trèfle gauche ou T^d le trèfle droit. En effet $\lambda'(T^d) = \lambda(S^3, T_1^d) = \lambda(-S^3, T_{-1}^g) = -\lambda(S^3, T_{-1}^g) = \lambda(S^3, T_1^g) = \lambda'(T^g)$.

1.5. THÉORÈME. *Il y a un bon nombre de Casson qui, outre les propriétés (0) à (6) vérifie:*

7) Si $\lambda(M)$ est non nul alors le groupe fondamental de M a des représentations non triviales dans $SU(2)$.

8) $\lambda'(T) = 1$.

1.6. *Définition.* C'est ce nombre que l'on appelle l'invariant de Casson de la sphère d'homologie M . L'invariant de Casson d'un nœud $K \subset M$ sera le $\lambda'(K)$ associé.

1.7. COROLLAIRE. a) *L'invariant de Rohlin d'une sphère d'homotopie ou d'une sphère d'homologie amphichérale est nul.*

b) *Un nœud K de S^3 avec $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$ non nul vérifie la propriété P.*

(Autrement dit $K_n = S^3$ seulement si $n = 0$.)

1.8. *Remarque.* La démonstration du fait que l'invariant de Casson que l'on construit est bon utilise un théorème de Newstead difficile. On verra cependant facilement que $\lambda''(K, L)$ est pair pour tout entrelacs bord.

Cela implique que $\lambda'(K)$ est congru modulo deux à $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$ (il suffit de remplacer dans la démonstration de 3) les égalités par des congruences modulo 2).

Les propriétés 4) et 5) ont des démonstrations directes qui sont signalées par un astérisque * (qui admet le théorème de Newstead se passera donc de ces démonstrations).

Comme 6) est une conséquence directe de $\lambda'(K) \equiv \frac{1}{2} \Delta_K''(1)$ modulo 2, la première partie du corollaire 1.7 est indépendante du théorème de Newstead, dans la deuxième partie il faut supposer $\lambda'(K)$ non nul, ce qui est certainement le cas si est non nul l'invariant de Rohlin-Robertello de K qui est la réduction modulo 2 de $\frac{1}{2} \Delta_K''(1)$ (cf. appendice A).

1.9. *Remarque.* On pourrait vouloir définir l'invariant de Casson par $\lambda(S^3) = 0$ et les propriétés 1) et 3) en arguant du fait que toute sphère d'homologie est obtenue à partir de S^3 par une suite de chirurgies de Dehn de coefficients ± 1 (cf. le lemme 2.1 ci-dessous). Il faut alors montrer que $\lambda(M)$ ne dépend pas de la suite de chirurgies effectuées. Cela ne semble pas possible dans le cadre des sphères d'homologie entière bien que K. Walker ait réussi une telle approche dans le cadre plus large des sphères d'homologie rationnelle ([W, ch. 5]). Casson construit donc plus conceptuellement son invariant à partir d'espaces de représentations (cf. paragraphe 3).

1.10. *Remarque.* L'invariant de Casson n'est pas un invariant de cobordisme homologique:

a) Si un nœud L dans S^3 borde un disque lisse D dans B^4 , la sphère d'homologie L_1 borde un disque d'homologie Δ^4 . (L'union P^4 de B^4 et de l'anse h^2 qui crée L_1 a pour générateur de son second groupe d'homologie l'union Σ^2 du disque D et de l'âme de l'anse h^2 . Cette surface Σ^2 est une sphère lisse d'auto intersection $+1$, il suffit de «contracter» Σ^2 pour obtenir le disque d'homologie Δ^4 .)

b) Pour tout nœud K la somme connexe $K \# -K$ de K et de son image dans un miroir borde un disque lisse dans D^4 et $\lambda'(K \# -K) = \frac{1}{2} \Delta_{K \# -K}''(1) = \frac{1}{2} \Delta_K''(1) + \frac{1}{2} \Delta_{-K}''(1) = \Delta_K''(1)$. En prenant pour K le nœud de trèfle on obtient le nœud carré $L = K \# -K$ qui borde un disque lisse et dont l'invariant de Casson vaut 2, donc $\lambda(L_1) = \lambda'(L)$ est non nul.

b*) Si l'on veut éviter le théorème de Newstead on peut se reporter à l'appendice B, où l'on montre directement $\lambda'(K) = \frac{1}{2} \Delta_K''(1)$ pour les nœuds ayant une surface de Seifert de genre 1 dénouée. Le nœud du docker (cf. figure 1) est un tel nœud et il borde un disque dans D^4 ; comme son polynôme d'Alexander est $5 - 2(t + t^{-1})$ son invariant de Casson λ' vaut -2 donc est non nul.

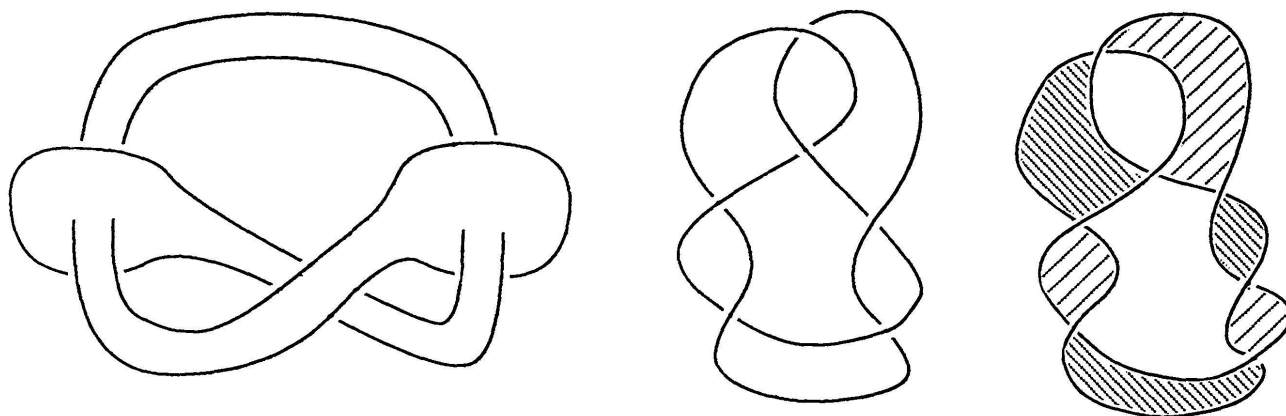


FIGURE 1
Le nœud du docker

La démonstration de la proposition 1.3 est donnée au paragraphe 2. Elle n'utilise que des méthodes classiques et peut être sautée en première lecture. L'invariant de Casson est construit au paragraphe 3. La vérification des propriétés 1) et 2) sera faite au paragraphe 4. Pour la propriété 8) on a besoin d'un calcul explicite sur un exemple. Cela est fait en suivant Casson au paragraphe 4 où (sans utiliser le théorème de Newstead!) l'on obtient une formule (pas très explicite) pour le λ' d'un quelconque nœud fibré (cf. 4.6). Un autre calcul est donné dans l'appendice B de A. Marin qui montre que $\lambda'(K) = \frac{1}{2} \Delta_K''(1)$ pour un nœud K admettant une surface de Seifert dénouée

de genre 1. Enfin, dans l'appendice C, C. Lescop calcule directement, à partir de la définition du paragraphe 3, l'invariant de Casson des sphères d'homologie qui sont des fibrés de Seifert avec trois fibres exceptionnelles. L'appendice A est consacré au polynôme d'Alexander et à son rapport avec l'invariant de Rohlin-Robertello.

2. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION (1.3)

Elle se fait en deux étapes: dans un premier temps on montre que 0), 1) et 3) impliquent l'unicité de λ et les points 4), 5) et 6). Ensuite on montre que 2) implique 3).

A. UNICITÉ DE λ ET 4), 5), 6) SACHANT 0), 1) ET 3)

2.1. LEMME. *Soit M une sphère d'homologie. Alors M est le dernier élément M_n d'une suite M_0, \dots, M_n de sphères d'homologie telles que: M_0 est la sphère S^3 et chaque M_{i+1} est obtenue à partir de la précédente M_i par une chirurgie de coefficient $\varepsilon_i = \pm 1$ sur un nœud K^i de M_i .*