

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 38 (1992)  
**Heft:** 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES  
D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS  
**Kapitel:** 2. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION (1.3)  
**Autor:** Guillou, L. / Marin, A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-59492>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 07.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

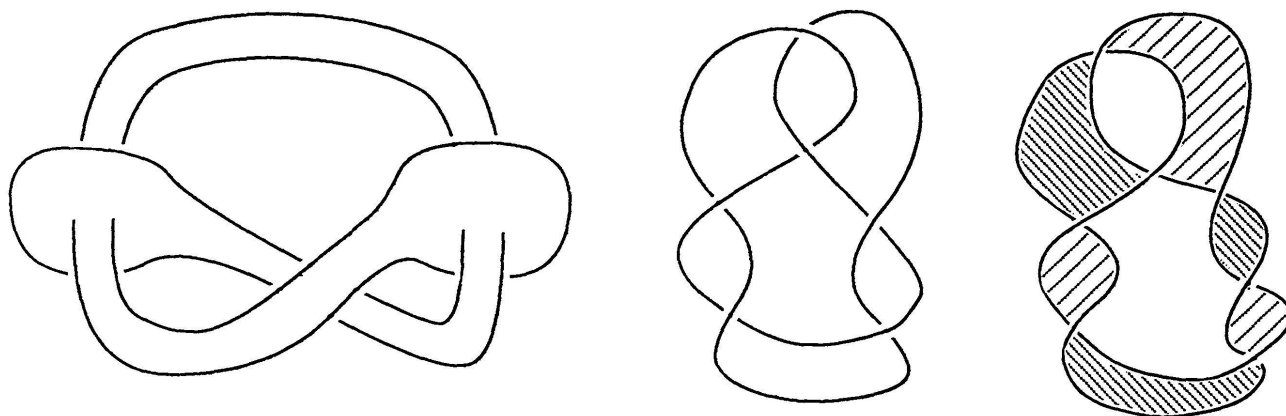


FIGURE 1  
Le nœud du docker

La démonstration de la proposition 1.3 est donnée au paragraphe 2. Elle n'utilise que des méthodes classiques et peut être sautée en première lecture. L'invariant de Casson est construit au paragraphe 3. La vérification des propriétés 1) et 2) sera faite au paragraphe 4. Pour la propriété 8) on a besoin d'un calcul explicite sur un exemple. Cela est fait en suivant Casson au paragraphe 4 où (sans utiliser le théorème de Newstead!) l'on obtient une formule (pas très explicite) pour le  $\lambda'$  d'un quelconque nœud fibré (cf. 4.6). Un autre calcul est donné dans l'appendice B de A. Marin qui montre que  $\lambda'(K) = \frac{1}{2} \Delta_K''(1)$  pour un nœud  $K$  admettant une surface de Seifert dénouée

de genre 1. Enfin, dans l'appendice C, C. Lescop calcule directement, à partir de la définition du paragraphe 3, l'invariant de Casson des sphères d'homologie qui sont des fibrés de Seifert avec trois fibres exceptionnelles. L'appendice A est consacré au polynôme d'Alexander et à son rapport avec l'invariant de Rohlin-Robertello.

## 2. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION (1.3)

Elle se fait en deux étapes: dans un premier temps on montre que 0), 1) et 3) impliquent l'unicité de  $\lambda$  et les points 4), 5) et 6). Ensuite on montre que 2) implique 3).

### A. UNICITÉ DE $\lambda$ ET 4), 5), 6) SACHANT 0), 1) ET 3)

2.1. LEMME. *Soit  $M$  une sphère d'homologie. Alors  $M$  est le dernier élément  $M_n$  d'une suite  $M_0, \dots, M_n$  de sphères d'homologie telles que:  $M_0$  est la sphère  $S^3$  et chaque  $M_{i+1}$  est obtenue à partir de la précédente  $M_i$  par une chirurgie de coefficient  $\varepsilon_i = \pm 1$  sur un nœud  $K^i$  de  $M_i$ .*

*Démonstration.* Remarquons d'abord que si un entrelacs  $(K, L)$  dans une sphère d'homologie  $M$  a un nombre d'enlacement  $l(K, L)$  nul il y a une surface de Seifert pour  $L$  disjointe de  $K$ ; ainsi une section du fibré normal à  $L$  est repérée par le même nombre entier, que  $L$  soit considéré comme nœud dans la sphère d'homologie  $M$  ou dans celle obtenue par une chirurgie de coefficient  $\varepsilon = \pm 1$  sur le nœud  $K$ . Il suffit donc de montrer que  $M$  est obtenue par chirurgie sur un entrelacs  $(K^1, \dots, K^n)$  de  $S^3$  avec tous les nombres d'enlacement  $l(K^i, K^j)$  nuls et les coefficients  $\varepsilon_i$  valant  $\pm 1$ .

D'après un théorème classique  $M$  s'obtient par chirurgie entière sur un entrelacs de  $S^3$ . Quitte à faire une somme connexe avec  $\pm \mathbf{CP}^2$  on peut supposer que la forme d'intersection de la trace de la chirurgie est indéfinie et impaire. Comme  $M$  est une sphère d'homologie cette forme est de plus unimodulaire, elle est donc diagonalisable (cf. [Se] p. 92). Il suffit alors de réaliser la diagonalisation par glissement d'anses.  $\square$

L'unicité suit alors de la formule 3) par récurrence sur la longueur  $n$  de la suite donnée en 2.1.

2.2. *Démonstration de 4).* Si une section du fibré normal à un nœud  $K$  dans une sphère d'homologie orientée  $M$  est repérée par  $\varepsilon = \pm 1$ , elle est repérée par  $-\varepsilon$  si l'on considère  $K$  comme nœud dans la sphère d'homologie  $-M$  obtenue en changeant l'orientation de  $M$ . La formule 4) découle alors de 3) par récurrence sur la longueur  $n$  de la suite de 2.1 puisque le polynôme d'Alexander de  $K$  ne dépend pas de l'orientation de  $M$  (cf. appendice A). La récurrence débute avec  $\lambda(-S^3) = \lambda(S^3) = 0$  car  $S^3$  est amphichérale.  $\square$

2.3. *Démonstration de 5).* Elle s'obtient encore par récurrence sur la somme des longueurs  $m$  et  $n$  de suites produites par 2.1 pour  $M$  et  $N$  respectivement, une fois que l'on a remarqué que si  $K$  est un nœud dans  $M$  son polynôme d'Alexander est le même qu'on le considère comme nœud dans  $M$  ou dans la somme connexe  $M \# N$ .  $\square$

2.4. *Démonstration de 6).* D'après 2.1 la propriété 6) découlera des propriétés 0), 1) et 3) et de la proposition 2.5 ci-dessous.  $\square$

2.5. PROPOSITION. Soit  $K$  un nœud dans une sphère d'homologie  $M$  et  $\varepsilon = \pm 1$ ; alors

$$\rho(M, K_\varepsilon) - \rho(M) = \frac{1}{2} \Delta_K''(1) \pmod{2} .$$

*Démonstration de 2.5.* Soient  $V$  et  $V'$  des variétés spin de dimension quatre qui bordent  $M$  et  $M' = (M, K_\varepsilon)$  respectivement. Les formes quadratiques de  $V$  et  $V'$  sont unimodulaires paires et leurs signatures sont divisibles par 8 (cf. [HNK] Theorem 6.3); les invariants de Rohlin de  $M$  et de  $M'$  sont par définition les réductions modulo 2 des quotients  $\sigma(V)/8$  et  $\sigma(V')/8$ .

Soit  $W'$  l'union de  $V$  et d'une anse d'indice 2 attachée le long de  $K$  au moyen de la trivialisatation déterminée par le coefficient  $\varepsilon = \pm 1$ . Le bord de  $W'$  est  $M'$  et l'on peut former la variété fermée  $W = W' \cup (-V')$ . L'union  $F$  de l'âme de la chirurgie et d'une surface de Seifert  $F'$  du nœud  $K$  dans  $M$  est une surface caractéristique de  $W$ , donc son auto-intersection  $F.F$  est congrue modulo 8 à la signature  $\sigma(W)$  de  $W$ . La formule de Rohlin (cf. [R1] ou [GM]) détermine la classe de congruence modulo 16 de  $\sigma(W)$ :

$$\text{Arf}(\psi) = \frac{\sigma(W) - F.F}{8} \pmod{2}.$$

Ici la forme de Rohlin  $\psi$  de la surface caractéristique  $F$  coïncide avec  $q_2$ , la réduction modulo 2 de  $\frac{1}{2}q$  où  $q$  est la forme quadratique du nœud<sup>1)</sup>  $K$ ;

$\text{Arf}(\psi)$  est donc  $R(K)$  l'invariant de Rohlin-Robertello du nœud  $K$  (cf. appendice A). On a  $\sigma(W) = \sigma(W') - \sigma(V') = \sigma(V) + \varepsilon - \sigma(V')$ . Comme l'auto-intersection  $F.F$  de la surface  $F$  dans  $W$  vaut  $\varepsilon$  la proposition 2.5 découlera du lemme A2 ci-dessous qui sera démontré dans l'appendice A.

A.2. LEMME. *Soit  $K$  un nœud dans une sphère d'homologie  $M$ , alors l'invariant de Rohlin-Robertello de  $K$  est la réduction modulo 2 de  $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$ .*

B. DÉMONSTRATION DE 3) SACHANT 2)

*1<sup>er</sup> pas: Réduction au cas où  $K$  est un nœud dans  $S^3$*

Elle se fait par récurrence sur le nombre  $n$  donné par le lemme 2.1. Supposons 3) montrée pour les nœuds dans les sphères d'homologie  $M$  qui s'obtiennent à partir de  $S^3$  par une suite de moins de  $n$  chirurgies de coefficient  $\pm 1$  (si  $n = 1$  on suppose donc que 3) est vraie pour les nœuds dans  $S^3$ ), et soit  $L'$  un nœud dans une sphère d'homologie  $M' = (M, K_\varepsilon)$  obtenue par chirurgie sur le nœud  $K$  de  $M$  avec le coefficient  $\varepsilon = \pm 1$ .

<sup>1)</sup> Plus précisément de la forme quadratique de la surface de Seifert  $F'$  du nœud  $K$  (cf. Appendice A ou [G], pp. 30-33).

2.6. LEMME. *Le nœud  $L'$  est isotope dans  $M'$  à un nœud  $L$  dans  $M \cap M'$  formant avec  $K$  un entrelacs bord  $(K, L)$  dans  $M$ .*

*Démonstration de 2.6.* Une longitude du tore  $M \setminus \text{int}(M' \cap M)$  est encore un parallèle du tore  $M' \setminus \text{int}(M \cap M')$  puisque son intersection avec un méridien de  $M' \setminus \text{int}(M \cap M')$  est  $\pm 1$ . Donc à collier de bord près, une surface de Seifert  $F$  pour  $K \subset M$  fournit une surface de Seifert  $F^*$  pour  $K^* \subset M'$  âme du tore  $M' \setminus \text{int}(M \cap M')$ . Si  $G'$  est une surface de Seifert pour  $L'$  dans  $M'$ , puisque toute surface de Seifert est voisinage régulier d'un bouquet de cercles,  $G'$  est isotope à une surface  $G$  telle que  $F^* \cap G = \emptyset$  et donc si  $L = \partial G$ , on a  $L \subset M$  et  $(K, L)$  est un entrelacs bord dans  $M$ .  $\square$

Comme  $\lambda'$  est un invariant des classes d'isotopie de nœud et d'après la propriété 2) on a

$$\lambda'(L' \subset M') = \lambda'(L \subset M') = \lambda'(L \subset M) + \varepsilon \cdot \lambda''(K, L) = \lambda'(L \subset M) .$$

D'autre part, comme tout cycle  $c$  de  $G$  est disjoint de  $F^*$  le nombre d'enlacement  $l(K^*, c)$  est nul et on peut pour calculer la matrice de Seifert de  $G$  faire border à une base de  $H_1(G; \mathbf{Z})$  des surfaces disjointes de  $K^*$ , donc dans  $M$ , et les nœuds  $(L' \subset M')$  et  $(L \subset M)$  ont même matrice de Seifert donc même polynôme d'Alexander en particulier  $\frac{1}{2} \Delta''_{(L' \subset M')} (1) = \frac{1}{2} \Delta''_{(L \subset M)} (1)$  et l'égalité

$$\lambda'(L' \subset M') = \frac{1}{2} \Delta''_{(L' \subset M')} (1) \cdot \lambda'(T) \text{ suit de l'hypothèse de récurrence}$$

$$\lambda'(L \subset M) = \frac{1}{2} \Delta''_{(L \subset M)} (1) \cdot \lambda'(T). \quad \square$$

*2<sup>e</sup> pas: Cas où  $K$  est un nœud dans  $S^3$*

On sait qu'en changeant successivement certains croisements du nœud  $K$  on peut le rendre trivial. Comme l'invariant de Casson  $\lambda'$  et  $\frac{1}{2} \Delta''(1) \cdot \lambda'(T)$  coïncident pour le nœud trivial il suffit pour établir 3) de montrer que ces deux invariants varient de la même manière quand on change un croisement.

Soit  $K$  un nœud dans  $S^3$  et  $C$  un cercle bord d'un disque  $D$  coupant  $K$  transversalement en deux points avec intersection algébrique nulle. La sphère d'homologie  $C_\varepsilon$  est difféomorphe à  $S^3$  et le nœud  $(K \subset C_\varepsilon)$  s'identifie à un nœud dans  $S^3$  que l'on peut voir comme le nœud  $K$  après que l'on ait changé de  $-\varepsilon$  à  $\varepsilon$  le signe d'un croisement entre les deux brins de  $K$  perçant  $D$  (cf. fig. 2).

Soit  $\mu$  un invariant défini sur les nœuds dans  $S^3$  et à valeurs dans  $\mathbb{Z}$  (par exemple  $\mu = \lambda'$  ou  $\mu = \frac{1}{2} \Delta''(1) \cdot \lambda'(T)$ ).

2.7. *Définition.* Le nœud obtenu par le  $\varepsilon$ -changement de croisement  $(D, C)$  est par définition le nœud  $(K \subset C_\varepsilon)$ .

Deux changements de croisement sont dits *non enlacés* si ils sont portés par deux disques  $D$  et  $D'$  disjoints tels que les deux paires de points  $K \cap D$  et  $K \cap D'$  sont non enlacées sur  $K$ .

La variation de  $\mu$  par le changement de croisement  $(D, C)$  est:

$$\mu^*(C, K) = \mu(K \subset C_1) - \mu(K) .$$

Remarquons que si  $\mu = \lambda'$ , alors  $\mu^*(C, K) = \lambda''(C, K)$ . D'autre part on ne considère que le changement  $\mu(K \subset C_1) - \mu(K)$ , car le changement  $\mu(K \subset C_{-1}) - \mu(K)$  vaut  $-(\mu(K' \subset C_1) - \mu(K'))$  où  $K' \subset S^3$  s'identifie à  $K \subset C_{-1}$ .

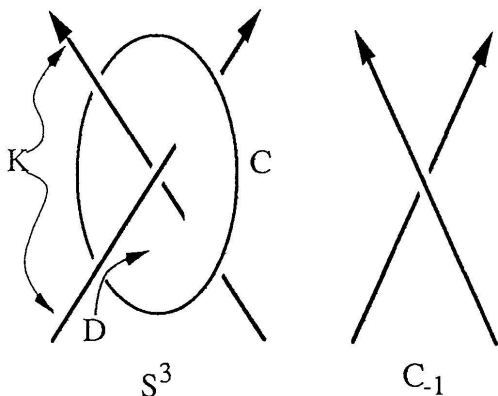


FIGURE 2

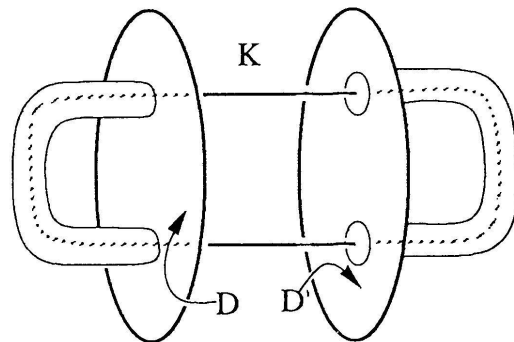


FIGURE 3

2.8. LEMME. Si  $\mu = \lambda'$  ou si  $\mu = \frac{1}{2} \Delta''(1)$  alors  $\mu^*(C, K)$  est invariant par changement de croisement non enlacé avec  $D$ .

*Démonstration de 2.8.* Soit  $D'$  le disque portant le changement de croisement disjoint de  $D$ .

a) cas  $\mu = \lambda'$ : Comme les deux changements de croisement sont disjoints les cercles  $C$  et  $C'$  bordent dans le complémentaire de  $K$  des surfaces de Seifert disjointes (cf. fig. 3). Donc  $(C, C')$  est un entrelacs bord dans  $K_1$  et  $\lambda''_{K_1}(C, C') = 0$  (où pour  $(L, M, N)$  un entrelacs dans une sphère d'homologie on a noté  $\lambda''_{L_i}(M, N)$  la valeur de l'invariant  $\lambda''$  sur l'entrelacs  $(M, N)$  vu comme entrelacs dans la sphère d'homologie  $L_i$ ). Développons  $\lambda''_{C'_1}(C, K) - \lambda''_{C_0}(C, K)$ :

$$\begin{aligned}
 \lambda''_{C'_1}(C, K) - \lambda''_{C'_0}(C, K) &= \lambda(C'_1, C_1, K_1) - \lambda(C'_1, C_0, K_1) - \lambda(C'_1, C_1, K_0) \\
 &\quad + \lambda(C'_1, C_0, K_0) - \lambda(C'_0, C_1, K_1) + \lambda(C'_0, C_0, K_1) \\
 &\quad + \lambda(C'_0, C_1, K_0) - \lambda(C'_0, C_0, K_0) \\
 &= \lambda(C'_1, C_1, K_1) - \lambda(C'_1, C_0, K_1) - \lambda(C'_0, C_1, K_1) \\
 &\quad + \lambda(C'_0, C_0, K_1) \\
 &= \lambda''_{K_1}(C, C') = 0
 \end{aligned}$$

car  $(C_i, C'_j, K_0)$  étant la sphère  $S^3$  pour  $i, j \in \{0, 1\}$  est d'invariant de Casson nul. On obtient de même  $\lambda''_{C'_{-1}}(C, K) - \lambda''_{C'_0}(C, K) = 0$  ainsi  $\lambda''(C, K)$  est invariant par changement de croisement non enlacé avec  $D$ .  $\square$

b) cas  $\mu = \frac{1}{2} \Delta''(1) \cdot \lambda'(T)$ : D'après la formule de Conway (Lemme A1 de l'appendice A) on a:

$$\Delta_{(K \subset C_1)}(t) - \Delta_K(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2}) \Delta_{K_0}(t)$$

où  $K_0$  est un entrelacs à deux composantes. En réappliquant la formule de Conway au deuxième changement de croisement on obtient:

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{(K \subset (C_1, C'_\varepsilon))}(t) - \Delta_{(K \subset C'_\varepsilon)}(t)) - (\Delta_{(K \subset C_1)}(t) - \Delta_K(t)) \\
 = \varepsilon \cdot (t^{-1/2} - t^{1/2}) (t^{-1/2} - t^{1/2}) \Delta_{K_{00}}(t)
 \end{aligned}$$

La dérivée seconde en 1 du membre de gauche est, à  $\frac{1}{2} \lambda'(T)$  près, la variation de  $\mu^*(C, K)$  par le  $\varepsilon$ -changement de croisement porté par  $D'$ . Comme les deux changements de croisement sont disjoints l'entrelacs  $K_{00}$  a trois composantes et  $\Delta_{K_{00}}(1) = 0$ . Le membre de droite de l'égalité ci-dessus étant produit de trois fonctions qui s'annulent en  $t = 1$  a une dérivée seconde nulle en  $t = 1$ .  $\square$

## 2.9. FIN DE LA DÉMONSTRATION DE LA PROPRIÉTÉ 3)

Soit  $K, C, D$  comme plus haut. Le disque  $D$  coupe le nœud  $K$  en deux arcs  $A$  et  $B$ . Par changement de croisements disjoints de  $D$  on peut éliminer les auto-croisements de  $A$  puis, sans toucher à  $A$ , ceux de  $B$ . On peut donc, pour calculer  $\mu^*(C, K)$ , supposer que l'entrelacs  $(K, C)$  est celui dessiné sur la figure 4.

Le nœud  $K$  étant alors trivial on a pour les deux invariants  $\mu$  ( $\mu = \lambda'$  ou  $\mu = \frac{1}{2} \Delta''(1) \cdot \lambda'(T)$ ):

$$\mu^*(C, K) = \mu(K \subset C_1) = \mu(K^n)$$

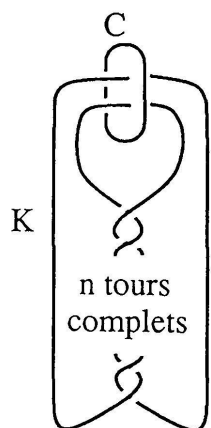


FIGURE 4

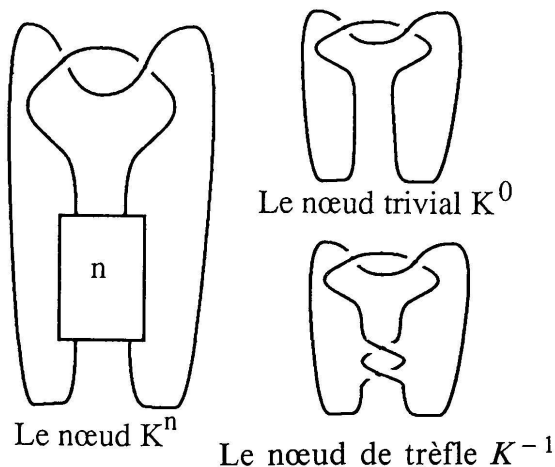


FIGURE 5

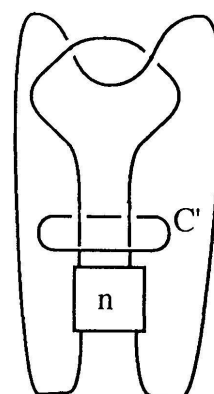


FIGURE 6

où l'on a noté  $K^n$  le nœud  $K \subset C_1$  représenté sur la figure 5 (la bande verticale représente  $n$  tours complets). Soit  $C'$  un cercle dénoué enlaçant la bande verticale du nœud  $K^n$  (cf. fig. 6). On a :

$$\mu^*(C', K^n) = \mu(K^{n-1}) - \mu(K^n)$$

Un changement de croisement porté par un nœud parallèle à  $C'$  est disjoint du disque  $D'$  bordant  $C'$  et transforme aussi  $K^n$  en  $K^{n \pm 1}$  donc le lemme 2.8 nous donne que  $\mu^*(C', K^n)$  est indépendant de  $n$ . Or  $K^0$  est le nœud trivial et  $K^{-1}$  est le nœud de trèfle  $T$  (cf. fig. 5), ainsi :

$$\mu^*(C', K^n) = \mu^*(C', K^0) = \mu(T)$$

$$\text{et } \mu^*(C, K) = -n\mu(T).$$

Comme  $\frac{1}{2} \Delta''(1) = 1$ , les invariants  $\lambda'$  et  $\frac{1}{2} \Delta''(1) \lambda'(T)$  ont même variation par changement de croisement. Alors les deux invariants  $\lambda'$  et  $\frac{1}{2} \Delta''(1) \lambda'(T)$  sont égaux car ils coïncident sur le nœud trivial.  $\square$

### 3. CONSTRUCTION DE L'INVARIANT DE CASSON

#### A. REPRÉSENTATIONS DANS $S^3 = SU(2)$

On identifie le groupe de Lie  $SU(2)$  à la sphère  $S^3$  des quaternions de norme un. L'algèbre de Lie de ce groupe est notée  $\mathcal{L}$  et s'identifie aux quaternions purs.

Pour tout groupe discret  $\Gamma$  on note  $R(\Gamma)$  l'espace des représentations de  $\Gamma$  dans le groupe  $S^3$ . Cet espace  $R(\Gamma)$  est muni de la topologie compacte