

3. Construction de l'invariant de Casson

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

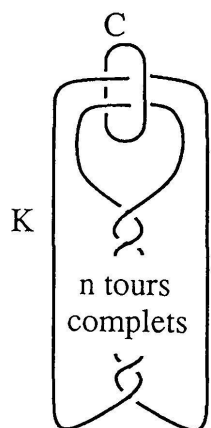


FIGURE 4

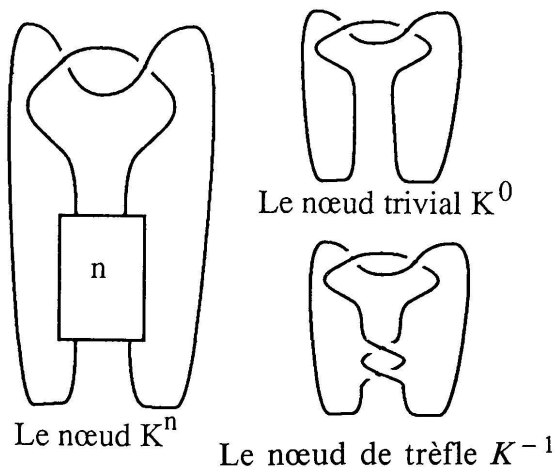
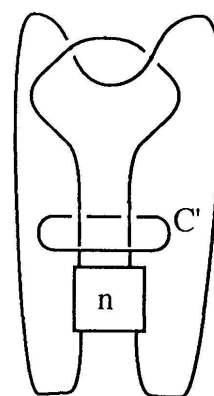
Le nœud K^n
Le nœud de trèfle K^{-1} 

FIGURE 6

où l'on a noté K^n le nœud $K \subset C_1$ représenté sur la figure 5 (la bande verticale représente n tours complets). Soit C' un cercle dénoué enlaçant la bande verticale du nœud K^n (cf. fig. 6). On a :

$$\mu^*(C', K^n) = \mu(K^{n-1}) - \mu(K^n)$$

Un changement de croisement porté par un nœud parallèle à C' est disjoint du disque D' bordant C' et transforme aussi K^n en $K^{n \pm 1}$ donc le lemme 2.8 nous donne que $\mu^*(C', K^n)$ est indépendant de n . Or K^0 est le nœud trivial et K^{-1} est le nœud de trèfle T (cf. fig. 5), ainsi :

$$\mu^*(C', K^n) = \mu^*(C', K^0) = \mu(T)$$

$$\text{et } \mu^*(C, K) = -n\mu(T).$$

Comme $\frac{1}{2} \Delta''(1) = 1$, les invariants λ' et $\frac{1}{2} \Delta''(1) \lambda'(T)$ ont même variation par changement de croisement. Alors les deux invariants λ' et $\frac{1}{2} \Delta''(1) \lambda'(T)$ sont égaux car ils coïncident sur le nœud trivial. \square

3. CONSTRUCTION DE L'INVARIANT DE CASSON

A. REPRÉSENTATIONS DANS $S^3 = SU(2)$

On identifie le groupe de Lie $SU(2)$ à la sphère S^3 des quaternions de norme un. L'algèbre de Lie de ce groupe est notée \mathcal{L} et s'identifie aux quaternions purs.

Pour tout groupe discret Γ on note $R(\Gamma)$ l'espace des représentations de Γ dans le groupe S^3 . Cet espace $R(\Gamma)$ est muni de la topologie compacte

ouverte, ainsi R est un foncteur contravariant de la catégorie des groupes dans celle des espaces topologiques. On désigne par $S(\Gamma)$ le fermé de $R(\Gamma)$ formé des représentations réductibles, c'est-à-dire ici des représentations d'image abélienne, et par $\tilde{R}(\Gamma)$ l'ouvert complémentaire (formé des représentations irréductibles).

Si L est un groupe libre de rang fini k , étant donné une base (a_1, \dots, a_k) de L , l'association à $\rho \in R(L)$ de $(\rho(a_1), \dots, \rho(a_k)) \in (S^3)^k$ détermine un homéomorphisme entre $R(L)$ et $(S^3)^k$.

Un changement de base se transcrit en une application à composantes polynômiales, donc C^∞ , de $(S^3)^k$. On peut donc munir $R(L)$ naturellement d'une structure algébrique lisse qui rend difféomorphisme l'homéomorphisme précédent.

Soit Γ un groupe de présentation finie isomorphe à $L / \langle N \rangle$ où L et N sont des groupes libres munis de bases de rang k et r respectivement (et $\langle N \rangle$ est le sous-groupe normal dans L engendré par N). Le difféomorphisme précédent entre $R(L)$ et $(S^3)^k$ identifie $R(G)$ à la préimage de $(1, \dots, 1) \in (S^3)^r$ par une application P à composantes polynômiales de $(S^3)^k$ vers $(S^3)^r$. Comme précédemment les changements de bases se traduisent par des applications polynômiales et on peut encore munir $R(\Gamma)$ d'une structure algébrique naturelle qui est lisse près de tout point régulier de P .

Le groupe S^3 agit à droite par conjugaison sur $R(\Gamma)$: si $\rho \in R(\Gamma)$ et $g \in S^3$, on définit $\rho \cdot g$ par $\rho \cdot g(\gamma) = g^{-1}\rho(\gamma)g$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Cette action est C^∞ , se factorise à travers $SO(3) = S^3 / \{\pm 1\}$ et est libre sur $\tilde{R}(\Gamma)$. Donc $\tilde{R}(\Gamma)$ est l'espace total d'un $SO(3)$ fibré principal $\tilde{R}(\Gamma) \rightarrow \hat{R}(\Gamma)$.

GROUPES LIBRES

3.1. LEMME. *L'espace tangent à $R(L)$ en la représentation triviale s'identifie fonctoriellement à $H^1(L; \mathcal{L}) = \text{Hom}(L, \mathcal{L})$.*

Démonstration de 3.1. Si $t \mapsto \rho_t$ est un chemin C^∞ dans $R(L)$ défini pour t proche de 0 avec ρ_0 la représentation triviale (qui vaut 1 $\in S^3$ sur tout élément de L), pour chaque $\gamma \in L$ on peut écrire $\rho_t(\gamma) = \exp(tu(\gamma) + O(t^2))$ pour un unique $u(\gamma) \in \mathcal{L}$ et t proche de 0. La condition $\rho_t(\gamma\gamma') = \rho_t(\gamma)\rho_t(\gamma')$ entraîne $u(\gamma\gamma') = u(\gamma) + u(\gamma')$ et donc $u \in H^1(L; \mathcal{L})$. \square

3.2. *Définition.* Pour tout groupe Γ on a une transformation naturelle

$$\psi: H^1(\Gamma; \mathbf{Z}) \rightarrow H_3(R(\Gamma); \mathbf{Z})$$

qui à $\alpha \in H^1(\Gamma; \mathbf{Z}) = \text{Hom}(\Gamma, \mathbf{Z})$ associe $\psi(\alpha) = R(\alpha)_*([R(\mathbf{Z})])$. On a noté $R(\alpha): R(\mathbf{Z}) \rightarrow R(\Gamma)$ l'application induite par l'homomorphisme α et $[R(\mathbf{Z})]$ la classe fondamentale¹⁾ de $R(\mathbf{Z})$.

3.3. LEMME. *Si L est un groupe libre de type fini, la transformation $\psi: H^1(L; \mathbf{Z}) \rightarrow H_3(R(L); \mathbf{Z})$ est un isomorphisme.*

Démonstration de 3.3. Si on choisit une base a_1, \dots, a_k de L et si $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ est la base duale de $H^1(L; \mathbf{Z})$ définie par $\alpha_i(a_j) = \delta_{ij}$ alors $R(\alpha_i)$ est l'inclusion de $S^3 = R(\mathbf{Z})$ comme $i^{\text{ème}}$ facteur de $(S^3)^k = R(L)$ et donc $\psi(\alpha_i) = [1 \times \dots \times S^3 \times \dots \times 1]$. On conclut grâce au théorème de Künneth. \square

3.4. COROLLAIRE. *Dans la catégorie des groupes libres de types fini, on a un isomorphisme de foncteurs: $\Phi: H^{3*}(R(\cdot); \mathbf{Z}) \rightarrow \Lambda^* H_1(\cdot; \mathbf{Z})$.*

Démonstration de 3.4. Si L est un groupe de cette catégorie par les théorèmes des coefficients universels $H^3(R(L); \mathbf{Z})$ est fonctoriellement isomorphe à $\text{Hom}(H_3(R(L); \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$ et $H_1(L; \mathbf{Z})$ est fonctoriellement isomorphe à $\text{Hom}(H^1(L; \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$. Donc la transformation naturelle ψ de 3.3 induit un isomorphisme fonctoriel de $H^3(R(L); \mathbf{Z})$ sur $H_1(L; \mathbf{Z})$. Cet isomorphisme s'étend en $\Phi: H^{3*}(R(L); \mathbf{Z}) \cong \Lambda^* H^3(R(L); \mathbf{Z})$ grâce à la formule de Künneth. \square

GROUPES DE SURFACES

Soit F une surface compacte sans bord orientée de genre g et désignons par F_* la surface F privée d'un disque ouvert. Choisissons un point base dans le bord de F_* . L'inclusion de F_* dans F induit une surjection de $\pi_1(F_*)$ sur $\pi_1(F)$ à laquelle correspond une injection $R(\pi_1(F)) \rightarrow R(\pi_1(F_*))$ dont l'image est $\partial^{-1}(1)$ où $\partial: R(\pi_1(F_*)) \rightarrow S^3$ est l'évaluation: $\partial(\rho) = \rho(\delta)$, $\delta = [\partial F_*] \in \pi_1(F_*)$. Rappelons que $\pi_1(F_*)$ est un groupe libre de rang $2g$ et que pour un choix convenable de la base $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ on a $\delta = [a_1, b_1] \dots [a_g, b_g]$.

Conventions

1) les bords sont orientés de sorte que (normale extérieure \oplus orientation du bord) donne une orientation de la variété à bord.

2) $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$.

¹⁾ Celle qui va sur la classe fondamentale de S^3 par l'homéomorphisme $\rho \mapsto \rho(1)$ entre $R(\mathbf{Z})$ et S^3 .

3) On compose les lacets dans le même sens que les applications: parcourir le lacet $\alpha\beta$ c'est d'abord parcourir le lacet β puis le lacet α .

3.5. PROPOSITION. *L'ensemble singulier de ∂ est l'espace $S(\pi_1(F_*))$ des représentations réductibles de $\pi_1(F_*)$ dans S^3 .*

3.6. COROLLAIRE. *Si g est supérieur à 1, $\tilde{R}(\pi_1(F))$ est une sous-variété de dimension $6g - 3$ de $R(\pi_1(F_*))$ et $\hat{R}(\pi_1(F))$ est une sous-variété de dimension $6g - 6$ de $\hat{R}(\pi_1(F_*))$. Si $g = 1$, $\tilde{R}(\pi_1(F)) = \emptyset$.*

Démonstration de 3.5. On choisit une base $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ de $\pi_1(F_*)$ comme ci-dessus et on identifie $R(\pi_1(F_*))$ à $(S^3)^{2g}$, on pose aussi $x_i = \rho(a_i)$ et $y_i = \rho(b_i)$, $1 \leq i \leq g$. Le fibré tangent à S^3 est trivialisé par des champs de vecteurs invariants à droite et on note $\exp: \mathcal{L} = T_1 S^3 \rightarrow S^3$ l'application exponentielle. Rappelons que la représentation adjointe¹⁾ de S^3 dans \mathcal{L} se factorise par le revêtement double $S^3 \rightarrow SO(3) = SO(\mathcal{L})$ et que deux éléments de S^3 distincts de ± 1 commutent si et seulement si leurs images dans $SO(3)$ ont même ensemble de points fixes. La proposition 3.5 découle alors du calcul de l'application tangente à l'application commutateur:

3.7. LEMME. *L'application tangente en (x, y) à l'application commutateur $\mathcal{C}: S^3 \times S^3 \rightarrow S^3$ est l'application de $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ définie par:*

$$(u, v) \mapsto \text{Ad}_{yx}[(\text{Id} - \text{Ad}_{y^{-1}})(u) + (\text{Ad}_{x^{-1}} - \text{Id})(v)] .$$

Démonstration de 3.7.

$$\begin{aligned} T\mathcal{C}|_{(x,y)}(u, o) &= \frac{d}{dt} [x^{-1} \exp(-tu) y^{-1} \exp(tu) x y y^{-1} x^{-1} y x] |_{t=0} \\ &= -x^{-1} u x + x^{-1} y^{-1} u y x = x^{-1} y^{-1} [u - y u y^{-1}] y x . \end{aligned}$$

Le calcul de $T\mathcal{C}|_{(x,y)}(0, v)$ est analogue. \square

Suite de la démonstration de 3.5. Il suit du lemme 3.7 que $T\mathcal{C}|_{(x,y)}$ est surjective sauf si $\text{Ad}_{y^{-1}}$ et $\text{Ad}_{x^{-1}}$ ont un axe en commun c'est-à-dire sauf si x et y commutent. (On convient que toute droite de \mathbf{R}^3 est un axe de l'identité de $SO(3)$).

L'application tangente à ∂ en $(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g)$, $T\partial: \mathcal{L}^{2g} \rightarrow \mathcal{L}$ s'écrit

$$\sum_{i=1}^g \text{Ad}_{c_i^{-1}} \circ T\mathcal{C}_i \text{ où } c_0 = 1, c_i = \prod_{j=1}^i [x_j, y_j] \text{ pour } 1 \leq i \leq g \text{ et } \mathcal{C}_i: (S^3)^{2g} \rightarrow S^3 \text{ vérifie } \mathcal{C}_i(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g) = [x_i, y_i].$$

¹⁾ Si $v \in \mathcal{L}$ et $g \in S^3$, $\text{Ad}_g(v) = g^{-1} v g$.

Donc si tous les x_i et y_j commutent, l'image de $T\partial$ est contenue dans le plan orthogonal à un axe commun aux $\text{Ad}_{x_i^{-1}}$ et $\text{Ad}_{y_j^{-1}}$ et $T\partial$ n'est pas surjective. Inversement si les x_i et y_j ne commutent pas tous entre eux alors ou bien il existe un i tel que $[x_i, y_i] \neq 1$ et alors déjà $T\mathcal{C}_{i|(1, \dots, x_i, y_i, \dots, 1)}$ est surjective ou bien tous les commutateurs $[x_i, y_i]$ sont triviaux, $T\partial = \sum_{i=1}^g T\mathcal{C}_i$, et il existe un x_i et un x_j tels que $\text{Ad}_{x_i^{-1}}$ et $\text{Ad}_{x_j^{-1}}$ n'aient pas d'axe commun et donc $\text{Im}(T\mathcal{C}_i) + \text{Im}(T\mathcal{C}_j) = \mathcal{L}$ et $T\partial_{|(x_1, y_1, \dots, x_g, y_g)}$ est surjective. \square

B. DÉFINITION DE L'INVARIANT DE CASSON D'UNE SPHÈRE D'HOMOLOGIE M

Soit $(M, F, W_1, W_2) = W_1 \cup_F W_2$ un scindement de Heegaard de genre g d'une variété M de dimension trois orientée: la variété M est séparée par une surface F de genre g en deux bretzels W_1 et W_2 . Désignons par F_* la surface F privée d'un disque ouvert. On oriente F et F_* comme bord de W_1 qui porte l'orientation induite de celle de M . Choisissons un point base dans le bord de F_* .

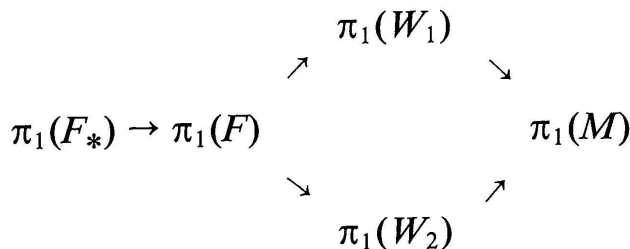
Les groupes fondamentaux de la surface à bord F_* et des bretzels W_1, W_2 sont libres, leurs espaces de représentations dans S^3 sont donc des produits de sphères de dimension trois.

Notons

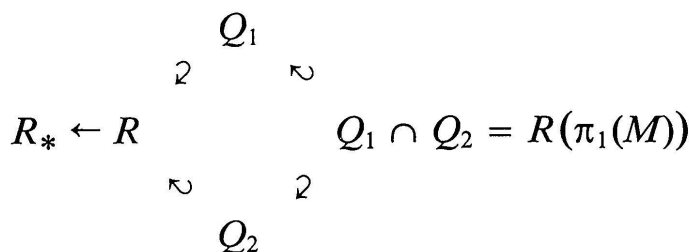
$$R_* = R(\pi_1(F_*)), Q_1 = R(\pi_1(W_1)), Q_2 = R(\pi_1(W_2)) \quad \text{et} \quad R = R(\pi_1(F)).$$

Les \sim et les \wedge ont le même sens qu'au début de A : par exemple $\tilde{Q}_1 = \tilde{R}(\pi_1(W_1))$ est l'espace des représentations irréductibles de $\pi_1(W_1)$ et $\hat{Q}_1 = \hat{R}(\pi_1(W_1))$ est le quotient de \tilde{Q}_1 par l'action de $SO(3)$.

Correspondant au diagramme de Van Kampen où toutes les flèches sont des surjections:



on a un diagramme d'injections d'espaces de représentations



Remarquons que Q_1 est une sous-variété de R_* de dimension moitié car on peut choisir une base $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ de $\pi_1(F_*)$ telle que a_1, \dots, a_g soit une base de $\pi_1(W_1)$. Il en est de même pour Q_2 .

3.8. LEMME. i) M est une sphère d'homologie entière si et seulement si l'intersection homologique $(Q_1, Q_2)_{R_*}$ de Q_1 et de Q_2 dans R_* vaut ± 1 .

ii) M est une sphère d'homologie rationnelle si et seulement si Q_1 et Q_2 sont transverses dans R_* en la représentation triviale ρ_0 .

iii) Si M est une sphère d'homologie entière le signe de l'intersection en ρ_0 est $(Q_1, Q_2)_{R^*}$.

Démonstration de 3.8. Si M est une sphère d'homologie rationnelle on a un isomorphisme de Mayer-Vietoris $H^1(W_1; \mathcal{L}) \oplus H^1(W_2; \mathcal{L}) \rightarrow H^1(F; \mathcal{L}) = H^1(F_*; \mathcal{L})$, qui peut être interprété comme un isomorphisme

$$H^1(\pi_1(W_1); \mathcal{L}) \oplus H^1(\pi_1(W_2); \mathcal{L}) \rightarrow H^1(\pi_1(F_*); \mathcal{L})$$

et le lemme 3.1 montre que cela équivaut à $T_{\rho_0}Q_1 \oplus T_{\rho_0}Q_2 \cong T_{\rho_0}R_*$, ce qui établit ii).

Quant à i), identifions R_* au groupe $(S^3)^{2g}$ et soit $m: Q_1 \times Q_2 \rightarrow R_*$ l'application $(q_1, q_2) \rightarrow q_1 q_2$. D'après la functorialité de la formule de Künneth le degré de cette application est le nombre d'intersection $(Q_1, Q_2)_{R^*}$. (On peut aussi s'en convaincre en remarquant que le degré de m est égal au signe près à celui de l'application m' où $m'(q_1, q_2) = (q_1)^{-1} q_2$, il suffit alors d'isotoper Q_1 dans R_* de sorte que Q_1 devienne transverse à Q_2 , la préimage de 1 par m' est $Q_1 \cap Q_2$ et les contributions locales de chaque point de $Q_1 \cap Q_2$ au degré de l'application m' et à $(Q_1, Q_2)_{R^*}$ sont alors clairement égales).

Maintenant par l'isomorphisme du lemme 3.4 l'application

$$m^*: H^{6g}(R_*; \mathbf{Z}) \rightarrow H^{6g}(Q_1 \times Q_2; \mathbf{Z}) \cong H^{3g}(Q_1; \mathbf{Z}) \otimes H^{3g}(Q_2; \mathbf{Z})$$

correspond à l'application

$$\Lambda^{2g}H_1(F_*; \mathbf{Z}) \rightarrow \Lambda^{2g}(H_1(W_1; \mathbf{Z}) \oplus H_1(W_2; \mathbf{Z}))$$

induite par les inclusions. D'après la suite de Mayer-Vietoris, M est une sphère d'homologie entière si et seulement si cette dernière application est un isomorphisme, donc, si et seulement si le degré de m qui est $(Q_1, Q_2)_{R_*}$ vaut ± 1 .

Enfin iii) vient de ce que les deux signes cherchés se lisent sur la même suite de Mayer-Vietoris comme on vient de voir. \square

3.9. COROLLAIRE. Si M est une sphère d'homologie entière $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ est compact.

Démonstration de 3.9. D'après ii) du lemme 3.8 si M est une sphère d'homologie rationnelle la représentation triviale est isolée dans le compact $Q_1 \cap Q_2$, donc $Q_1 \cap Q_2 - \{1\}$ est compact. Si de plus M est une sphère d'homologie entière, la représentation triviale est la seule représentation réductible de $Q_1 \cap Q_2 = R(\pi_1(M))$ ainsi $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2 = Q_1 \cap Q_2 - S(\pi_1(M)) = Q_1 \cap Q_2 - \{1\}$ est compact. \square

3.10. *Remarque.* Soit Γ un groupe se surjectant sur un produit libre $\Gamma_1 * \Gamma_2$ où $H_1(\Gamma_1)$ et $H_1(\Gamma_2)$ ont des éléments d'ordre supérieur à deux, alors l'espace des représentations irréductibles de Γ est non compact. En particulier si M est un fibré de Seifert dont la base est de caractéristique d'Euler inférieure à -1 ou si M est une somme connexe de deux variétés dont le H_1 a des éléments d'ordre supérieur à deux, $\tilde{Q}_1 \cap \tilde{Q}_2$ est non compact.

Soient en effet $\rho_1: \Gamma_1 \rightarrow \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $\rho_2: \Gamma_2 \rightarrow \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$ deux homomorphismes surjectifs avec $p > 2$ et $q > 2$. Soient x et y dans $\mathcal{L} = T_1 S^3$ avec $|x| = |y| = 1$. Définissons $\rho_{x,y}: \Gamma \rightarrow S^3$ comme $\tilde{\rho}_{x,y} \circ \pi$ où $\pi: \Gamma \rightarrow \Gamma_1 * \Gamma_2$ est une surjection et si a est dans Γ_1 et b dans Γ_2 , $\tilde{\rho}_{x,y}(a) = \exp\left(\frac{2\pi\rho_1(a)}{p}x\right)$, $\tilde{\rho}_{x,y}(b) = \exp\left(\frac{2\pi\rho_2(b)}{q}y\right)$. Cette représentation n'est irréductible que si x est différent de $\pm y$. \square

3.11. *Orientations de R_* , \tilde{R} , \hat{R} , \hat{Q}_1 , \hat{Q}_2*

Dans ce qui suit S^3 , Q_1 , Q_2 et R_* seront orientés de manière arbitraire (mais fixée!). Ensuite $SO(3)$ est orienté de sorte que le revêtement $S^3 \rightarrow SO(3)$ soit localement un difféomorphisme préservant l'orientation et toutes les submersions verront leur espace total orienté par la convention base \oplus fibre. Plus précisément, si $p: E \rightarrow B$ est une telle submersion, si $b_0 \in B$, si $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ et si $\varphi: U \times V \rightarrow E$ est une carte locale autour de e_0 (où V est un voisinage de e_0 dans $p^{-1}(b_0)$ et U un voisinage de b_0 dans B) telle que $\varphi|_{b_0 \times V}$ soit l'inclusion de V dans E et $p \circ \varphi$ la projection $U \times V \rightarrow U$ alors on demande que φ préserve l'orientation.

Ainsi \tilde{R} est orienté comme fibre de la submersion $\partial: \tilde{R}_* \rightarrow S^3$ et \hat{R} (resp. \hat{Q}_1 , \hat{Q}_2) comme base du $SO(3)$ fibré à droite $\tilde{R} \rightarrow \hat{R}$ (resp. $\tilde{Q}_1 \rightarrow \hat{Q}_1$, $\tilde{Q}_2 \rightarrow \hat{Q}_2$).

Les ensembles \hat{Q}_1 et \hat{Q}_2 sont des sous-variétés fermées de dimension moitié de la variété non compacte \hat{R} . Comme d'après le corollaire 3.9 $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ est compact on peut définir un nombre d'intersection homologique $\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$ de \hat{Q}_1 et \hat{Q}_2 dans \hat{R} (cf. [D], VIII.13). Ce nombre admet aussi la définition géométrique suivante que nous utiliserons de préférence: on peut rendre \hat{Q}_1 transverse à \hat{Q}_2 par une isotopie à support compact, l'intersection $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ est alors un nombre fini de points munis chacun d'un signe selon la règle usuelle. La somme de ces signes définit $\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$ car on montre par des arguments classiques que cette somme ne dépend pas de l'isotopie choisie.

3.12. *Remarque* (C. Lescop). On peut montrer le iii) du lemme 3.8 sans utiliser l'isomorphisme de foncteurs du corollaire 3.4 de la façon suivante. Etendons l'isotopie précédente en une isotopie à support compact de \hat{R}_* . Puisque \hat{Q}_1 et \hat{Q}_2 sont inclus dans \hat{R} qui est de codimension trois dans \hat{R}_* , on peut près de l'ensemble fini $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$, isotoper \hat{Q}_1 hors de \hat{R} dans \hat{R}_* . On relève ensuite la composition de ces deux isotopies à \tilde{R}_* pour obtenir (en prolongeant par l'identité sur $S(\pi_1(F_*))$) une isotopie de R_* , h_t , $0 \leq t \leq 1$, telle que $h_0 = \text{id}$ et $h_1(Q_1) \cap Q_2 = \{\rho_0\}$. Donc $(Q_1, Q_2)_{R_*}$ est égal au signe de l'intersection en ρ_0 laquelle est transverse d'après 3.8 ii). (On trouvera un argument semblable dans la démonstration de 3.17). Si l'on veut, on pourra se passer dans la suite de l'article du corollaire 3.4 en utilisant à sa place le lemme 3.1 et la présente remarque.

3.13. *Définition*. Soit (M, F, W_1, W_2) un scindement de Heegaard de genre g d'une sphère d'homologie M . L'invariant de Casson de (M, F, W_1, W_2) est:

$$\lambda(M, F, W_1, W_2) = \frac{1}{2} (-1)^g \frac{\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}}{(Q_1, Q_2)_{R_*}}.$$

3.14. *Remarques*. a) Si $g = 1$ on a $\langle \emptyset, \emptyset \rangle_{\emptyset} = 0$. D'ailleurs la seule sphère d'homologie de genre ≤ 1 est S^3 .

b) Si l'on change l'orientation de Q_1 (ou de Q_2) l'orientation de \hat{Q}_1 (resp. \hat{Q}_2) change simultanément et $\lambda(M, F, W_1, W_2)$ est inchangé. Il découle aussi de 3.11 que $\lambda(M, F, W_1, W_2)$ ne dépend pas non plus de l'orientation de S^3 ni de celle de R_* .

c) Le signe $(-1)^g$ sera expliqué dans la proposition 3.16, il est nécessaire pour que l'invariant de Casson ne dépende pas du choix du scindement de Heegaard de M .

d) Nous verrons au paragraphe 4 que $\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$ est toujours pair (essentiellement car $S^3 \rightarrow SO(3)$ est un revêtement double). Ceci explique le facteur $1/2$.

3.15*. *Remarques.* a) $\lambda(-M, F, W_1, W_2) = -\lambda(M, F, W_1, W_2)$

En effet si l'on change l'orientation de M on change simultanément celle de F_* donc δ devient δ^{-1} . Ainsi la nouvelle évaluation ∂ est le composé de l'ancien ∂ et de l'application inverse de S^3 qui renverse l'orientation de S^3 , il suit alors de 3.11 que l'orientation de \tilde{R} donc celle de \hat{R} est renversée et le numérateur de λ change de signe, tandis que le dénominateur est évidemment inchangé. \square

b) exercice: $\lambda(M, F, W_2, W_1) = \lambda(M, F, W_1, W_2)$

3.16. PROPOSITION ET DÉFINITION. *L'invariant $\lambda(M, F, W_1, W_2)$ est indépendant du scindement de Heegaard $W_1 \cup_F W_2$ de M .*

On le note $\lambda(M)$, c'est l'invariant de Casson de la sphère d'homologie M .

Démonstration de 3.16. D'après le théorème de Reidemeister-Singer (cf. [Si]) deux scindements de Heegaard de M sont stablement isomorphes. Il suffit donc de montrer que $\lambda(M, F, W_1, W_2)$ ne change pas dans une stabilisation élémentaire.

Dans une telle stabilisation la surface F devient F' , la somme connexe d'un tore T avec F et W_i devient W'_i somme connexe le long du bord d'un tore solide T_i avec W_i . On peut choisir les générateurs a et b de $\pi_1(T)$ de sorte que $\pi_1(F'_*) \cong \langle a, b \rangle * \pi_1(F_*)$ et que a soit homotope à zéro dans $T_2 \subset W'_2$ et b homotope à zéro dans $T_1 \subset W'_1$. Ainsi on peut identifier R'_* à $S^3 \times S^3 \times R_*$, Q'_1 à $S^3 \times 1 \times Q_1$ et Q'_2 à $1 \times S^3 \times Q_2$. On identifie R_* à $1 \times 1 \times R_*$ et Q_i à $1 \times 1 \times Q_i$ dans R'_* et une fois choisies les orientations de S^3 , R'_* , Q'_1 et Q'_2 on considère sur R_* , Q_1 et Q_2 les orientations naturelles induites. Ceci posé on a déjà:

$$\begin{aligned} (Q'_1, Q'_2)_{R'_*} &= (-1)^{\dim(Q_1)\dim(S^3)} (S^3 \times 1, 1 \times S^3)_{S^3 \times S^3} (Q_1, Q_2)_{R_*} \\ &= (-1)^g (Q_1, Q_2)_{R_*} \end{aligned}$$

Pour calculer $\langle \hat{Q}'_1, \hat{Q}'_2 \rangle_{\hat{R}'}$ commençons par noter que $Q'_1 \cap Q'_2 = 1 \times 1 \times (Q_1 \cap Q_2) \subset 1 \times 1 \times R$ et que si $\delta' = [\partial F'_*] \in \pi_1(F'_*)$ alors

$\delta' = [a, b]\delta$. Donc la flèche d'évaluation $\partial': R'_* \rightarrow S^3$ est donnée par $\partial'(\rho') = \partial'(x, y, \rho) = [x, y]\partial(\rho)$ en posant $\rho'(a) = x, \rho'(b) = y$. Le calcul de l'application tangente à ∂' en ρ' donne (cf. 3.5) $T_{\rho'}\partial' = T_{\rho'}\mathcal{C} \circ p + \text{Ad}_{[x, y]^{-1}} \circ T_{\rho'}(\partial \circ q)$ où \mathcal{C} est l'application commutateur et où p et q sont les projections de $R'_* = S^3 \times S^3 \times R_*$ sur $S^3 \times S^3$ et R_* . En un point de $1 \times 1 \times R$, puisque $T_{(1,1)}\mathcal{C} = 0$ (cf. 3.7) on a $T_{\rho'}\partial' = T_{\rho'}(\partial \circ q)$ et les sous-variétés $\tilde{R}' = \partial'^{-1}(1)$ et $S^3 \times S^3 \times \tilde{R}$ sont tangentes le long de $1 \times 1 \times \tilde{R}$ (cf. fig. 7). Et donc \tilde{R}' et $S^3 \times S^3 \times \tilde{R}$ sont localement difféomorphes près de $1 \times 1 \times \tilde{R} \supset \tilde{Q}'_1 \cap \tilde{Q}'_2$. Enfin puisque $1 \times 1 \times \tilde{R}$ est préservé par l'action libre de $SO(3)$ sur \tilde{R}' et que \hat{R} comme \hat{R}' s'identifient localement près de $1 \times 1 \times \hat{p}$ à des variétés transverses à l'orbite $(1 \times 1 \times \rho) \cdot SO(3)$ de $1 \times 1 \times \rho$ on voit que près de $1 \times 1 \times \hat{R}, \hat{R}'$ est difféomorphe à $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \hat{R}$ (cf. fig. 8). On peut bien sûr choisir les difféomorphismes précédents de sorte que $(\hat{R}', \hat{Q}'_1, \hat{Q}'_2)$ soit localement difféomorphe à $(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \times \hat{R}, \mathbf{R}^3 \times 0 \times \hat{Q}_1, 0 \times \mathbf{R}^3 \times \hat{Q}_2)$ près de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$. Par conséquent, si \hat{Q}_1 et \hat{Q}_2 sont transverses dans \hat{R} (et donc \hat{Q}'_1 et \hat{Q}'_2 dans \hat{R}' d'après ce qui précède), on a

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q}'_1, \hat{Q}'_2 \rangle_{\hat{R}'} &= (-1)^{\dim(\hat{Q}'_1)\dim(\mathbf{R}^3)} \langle \mathbf{R}^3 \times 0, 0 \times \mathbf{R}^3 \rangle_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3} \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} \\ &= (-1)^{g-1} \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} \end{aligned}$$

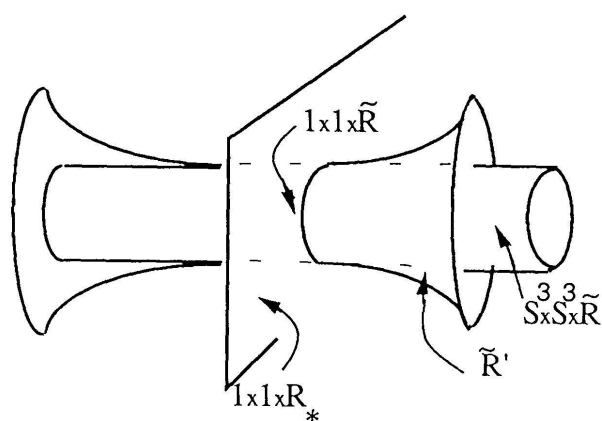


FIGURE 7

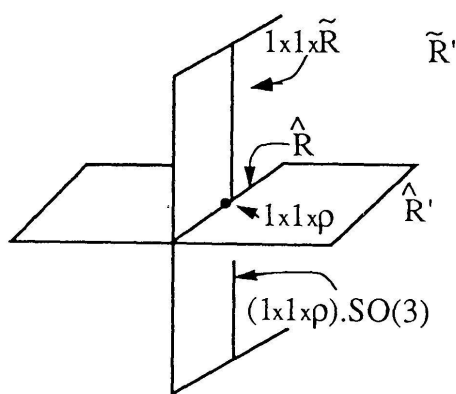


FIGURE 8

En général on se ramène au cas où \hat{Q}_1 et \hat{Q}_2 sont transverses dans \hat{R} de la manière suivante. Soit h une isotopie à support compact de l'identité de \hat{R} qui rend \hat{Q}_1 transverse à \hat{Q}_2 . Puisque l'on a vu que le fibré normal à \hat{R} dans \hat{R}' est trivial cette isotopie s'étend aisément en une isotopie à support compact de \hat{R}' .

En définitive,

$$\begin{aligned} \lambda(M, F', W'_1, W'_2) &= \frac{1}{2} (-1)^{g+1} \frac{(-1)^{g-1} \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}}{(-1)^g (Q_1, Q_2)_{R_*}} \\ &= \frac{1}{2} (-1)^g \frac{\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}}{(Q_1, Q_2)_{R_*}} = \lambda(M, F, W_1, W_2) \quad \square \end{aligned}$$

3.17*. PROPOSITION. *L'invariant de Casson est additif pour la somme connexe des sphères d'homologie orientées:*

$$\lambda(M' \# M'') = \lambda(M') + \lambda(M'').$$

Démonstration de 3.17. Soient $W'_1 \cup_{F'} W'_2$ et $W''_1 \cup_{F''} W''_2$ des scindements de Heegaard de M' et M'' . La somme connexe M de M' et de M'' est munie du scindement de Heegaard somme connexe. On a $R_* = R'_* \times R''_*$ et $Q_i = Q'_i \times Q''_i$. Et donc:

$$\begin{aligned} (Q_1, Q_2)_{R_*} &= (-1)^{g'g''} (Q'_1 \cdot Q'_2)_{R'_*} (Q''_1 \cdot Q''_2)_{R''_*} \\ &\text{où } g' = \text{genre}(F'), g'' = \text{genre}(F''). \end{aligned}$$

Reste à calculer $\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$. Notons d'abord que l'évaluation $\partial: R_* \rightarrow S^3$ s'écrit $\partial' \partial''$. Par conséquent R contient $R' \times 1$ et $1 \times R''$ et d'autre part (cf. 3.7) $T_{\rho' \times 1}(\partial) = T_{\rho' \times 1}(\partial' \circ p) + \text{Ad}_{\partial'(\rho')^{-1}} \circ T_{\rho' \times 1}(\partial'' \circ q)$ où p et q sont les projections de R_* sur R'_* et R''_* et $T_{1 \times \rho''}(\partial) = T_{1 \times \rho''}(\partial' \circ p) + T_{1 \times \rho''}(\partial'' \circ q)$. Puisque $T_1 \partial'$ et $T_1 \partial''$ sont nulles (cf. 3.5) on déduit que $\tilde{R}' \times R''_*$ est tangent à $\tilde{R} = \partial^{-1}(1)$ le long de $\tilde{R}' \times 1$ et que $R'_* \times \tilde{R}''$ est tangent à \tilde{R} le long de $1 \times \tilde{R}''$.

Et, comme en 3.16, on voit que \hat{R} contient $\hat{R}' \times 1$ et $1 \times \hat{R}''$ comme sous-variétés admettant des fibrés normaux triviaux isomorphes au produit de \hat{R}' et de \hat{R}'' par des voisinages de la représentation triviale dans R''_* et R'_* respectivement. On a une situation analogue pour $\hat{Q}'_1 \times 1$ et $1 \times \hat{Q}''_1$ dans \hat{Q}_1 et pour $\hat{Q}'_2 \times 1$ et $1 \times \hat{Q}''_2$ dans \hat{Q}_2 , on a donc:

$$(\hat{R}, \hat{Q}_1, \hat{Q}_2) \cong (\hat{R}' \times R''_*, (-1)^{g''} \hat{Q}'_1 \times Q''_1, (-1)^{g''} \hat{Q}'_2 \times Q''_2)$$

près de $\hat{R}' \times 1$ et un isomorphisme similaire près de $1 \times \hat{R}''$.

Maintenant les éléments de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$, c'est-à-dire les classes de conjugaison de représentations irréductibles de $\pi_1(M) = \pi_1(M') * \pi_1(M'')$ se répartissent en trois groupes:

(i) Celles triviales sur $\pi_1(M'')$, c'est-à-dire appartenant à

$$\hat{Q}'_1 \times 1 \cap \hat{Q}'_2 \times 1 .$$

(ii) Celles triviales sur $\pi_1(M')$, c'est-à-dire appartenant à

$$1 \times \hat{Q}''_1 \cap 1 \times \hat{Q}''_2 .$$

iii) Celles qui ne sont triviales ni sur $\pi_1(M')$ ni sur $\pi_1(M'')$, c'est-à-dire appartenant à l'ensemble des classes des éléments de

$$(\tilde{Q}'_1 \cap \tilde{Q}'_2) \times (\tilde{Q}''_1 \cap \tilde{Q}''_2) .$$

Comptons la contribution apportée à $\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$ par les points de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ dans les trois cas précédents. On peut tout d'abord rendre \hat{Q}'_1 transverse à \hat{Q}'_2 par une isotopie à support compact de $\hat{R}' \times 1$ et \hat{Q}''_1 transverse à \hat{Q}''_2 par une isotopie à support compact de $1 \times \hat{R}''$. Puisque $\hat{R}' \times 1 \cap 1 \times \hat{R}'' = \emptyset$ on peut étendre ces isotopies en une isotopie à support compact de \hat{R} .

Si un point de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ est dans le groupe (i) le difféomorphisme local autour de $\hat{R}' \times 1$ ci-dessus montre qu'il contribue pour

$\langle \hat{Q}'_1 \times Q'_1, \hat{Q}'_2 \times Q'_2 \rangle_{\hat{R}' \times R'_*} = (-1)^{g''(g'-1)} \langle \hat{Q}'_1, \hat{Q}'_2 \rangle_{\hat{R}'} (Q'_1, Q'_2)_{R'_*}$ puisque d'après le lemme 3.8 iii), Q'_1 et Q'_2 sont transverses en la représentation triviale et le signe attribué à cette intersection est $(Q'_1, Q'_2)_{R'_*}$.

De même si un point de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ est dans le groupe (ii) il contribue pour

$$(-1)^{(g''-1)g'} (Q'_1, Q'_2)_{R'_*} \langle \hat{Q}''_1, \hat{Q}''_2 \rangle_{\hat{R}''}$$

Montrons enfin que les points de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ dans le groupe (iii) ne contribuent pas à $\langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$. Pour cela remarquons que $\tilde{R}' \times \tilde{R}''$, préimage de $(1, 1)$ par la submersion $(\partial', \partial'') : \tilde{R} \cap (\tilde{R}'_* \times \tilde{R}''_*) \rightarrow S^3 \times S^3$, est une sous-variété de $\tilde{R} \cap (\tilde{R}'_* \times \tilde{R}''_*)$ et que l'action à droite de $S^3 \times S^3$ sur $\tilde{R} \cap (\tilde{R}'_* \times \tilde{R}''_*)$ donnée par $(\rho', \rho'') \cdot (g', g'') = (\rho' \cdot g', \rho'' \cdot g'')$ induit une action libre de $SO(3) \times SO(3)$ telle que le quotient \hat{R} obtenu contienne $\hat{R}' \times \hat{R}''$ comme sous-variété. De plus si $\hat{\mathcal{U}}$ est l'ouvert de \hat{R} quotient de $\tilde{R} \cap (\tilde{R}'_* \times \tilde{R}''_*)$ par l'action de $SO(3)$ (qui est diagonale sur $\tilde{R}'_* \times \tilde{R}''_*$) on a une $SO(3)$ -fibration $\hat{\mathcal{U}} \rightarrow \hat{R}$. Soit aussi \hat{Q}_i le quotient de $\tilde{Q}_i \cap (\tilde{R}'_* \times \tilde{R}''_*)$ par la même action de $S^3 \times S^3$; c'est une sous-variété de \hat{R} . Les images des points du groupe (iii) sont dans $\hat{R}' \times \hat{R}''$ donc en fait dans $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2 \subset \hat{R}' \times \hat{R}'' \subset \hat{R}$. Si on rend \hat{Q}_1 et \hat{Q}_2 transverses dans $\hat{R}' \times \hat{R}''$ par une

isotopie à support compact alors $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ devient un nombre fini de points et $\hat{R}' \times \hat{R}''$ étant de codimension trois dans \hat{R} on peut pousser, près de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$, \hat{Q}_1 hors de $\hat{R}' \times \hat{R}''$ et ainsi disjointer \hat{Q}_1 de \hat{Q}_2 par une isotopie à support compact dans \hat{R} . Cette isotopie se relève dans $\hat{\mathcal{U}} \subset \hat{R}$ en une isotopie qui est l'identité sur $\hat{R}' \times 1 \cup 1 \times \hat{R}'' \subset \hat{R} - \hat{\mathcal{U}}$ donc qui ne modifie pas les points des groupes i) et ii) mais qui fait disparaître les points du groupe iii).

En définitive il vient pour $\lambda(M)$:

$$\begin{aligned} \lambda(M) &= \frac{1}{2} (-1)^{g'+g''} \left[\frac{(-1)^{g''(g'-1)} \langle \hat{Q}'_1, \hat{Q}'_2 \rangle_{\hat{R}'} (Q''_1, Q''_2)_{R''_*}}{(-1)^{g'g''} (Q'_1, Q'_2)_{R'_*} (Q''_1, Q''_2)_{R''_*}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{(g''-1)g'} (Q'_1, Q'_2)_{R'_*} \langle \hat{Q}''_1, \hat{Q}''_2 \rangle_{\hat{R}''}}{(-1)^{g'g''} (Q'_1, Q'_2)_{R'_*} (Q''_1, Q''_2)_{R''_*}} \right] \\ &= \frac{1}{2} (-1)^{g'} \frac{\langle \hat{Q}'_1, \hat{Q}'_2 \rangle_{\hat{R}'}}{(Q'_1, Q'_2)_{R'_*}} + \frac{1}{2} (-1)^{g''} \frac{\langle \hat{Q}''_1, \hat{Q}''_2 \rangle_{\hat{R}''}}{(Q''_1, Q''_2)_{R''_*}} \\ &= \lambda(M') + \lambda(M''). \quad \square \end{aligned}$$

4. DÉMONSTRATION DES PROPRIÉTÉS 1) ET 2) DE L'INVARIANT DE CASSON

4.1. LEMME. (i) Soit K un nœud dans une sphère d'homologie M , alors il y a un scindement de Heegaard $W_1 \cup W_2$ de M tel que K soit une courbe séparante de la surface F .

(ii) On peut même demander à W_1 d'être un bicollier autour d'une surface de Seifert pour K .

(iii) Si (K, L) est un entrelacs bord dans M , on peut demander que K et L soient sur la surface F et la séparent en trois parties.

Démonstration de 4.1. Soit S une surface de Seifert pour le nœud K dans M et $S \times [-1, 1]$ un bicollier autour de S . Considérons M comme $S \times [-1, 1] \cup H^1 \cup H^2 \cup H^3$ où H^1 est une union disjointe d'anses d'indice 1 dont, par isotopie, on peut supposer toutes les sphères d'attachement dans $S \times 1$ et où H^2 et H^3 sont des unions disjointes d'anses d'indices 2 et 3 respectivement. Alors $W_1 = S \times [-1, 1] \cup H^1$, $W_2 = H^2 \cup H^3$ et $F = \partial W_1$ convient pour (i).

Pour (ii) écrivons $\partial^+ H^1$ pour l'adhérence de la partie de ∂H^1 qui ne rencontre pas $S \times 1$. Alors $S^+ = S \times 1 \cup \partial^+ H^1$ est la surface de Seifert