Appendice A Polynôme d'Alexander et forme quadratique d'un entrelacs orienté: Formule de Conway et invariant de Robertello

Objekttyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

APPENDICE A

POLYNÔME D'ALEXANDER ET FORME QUADRATIQUE D'UN ENTRELACS ORIENTÉ: FORMULE DE CONWAY ET INVARIANT DE ROBERTELLO

Soit K un entrelacs orienté dans une sphère d'homologie orientée M et F une surface de Seifert connexe pour K (cf. [Rf] p. 118-120 ou [G] p. 24-28). Soit $i: F \times [-1,1] \to M$ un bicollier orienté autour de F dans M. La *forme de Seifert* de la surface F est la forme bilinéaire $\mathscr{S}$ définie sur $H_1(F; \mathbf{Z})$ qui associe à deux classes d'homologie représentées par deux courbes x et y tracées sur la surface F le nombre d'enlacement de $x^+ = i(x, 1)$ et de y. Une *matrice de Seifert*[1]) S de F est une matrice de la forme $\mathscr{S}$ dans une base de $H_1(F; \mathbf{Z})$.

La forme antisymétrique $I = \mathscr{S} - {}^t\mathscr{S}$ est[2]) la forme d'intersection de la surface F, et si K est un nœud elle est unimodulaire car égale à celle de la surface F recollée avec un disque le long de K.

La forme symétrique $q = \mathscr{S} + {}^t\mathscr{S}$ est la *forme quadratique de la surface F*, elle est paire et dans le cas d'un nœud, non dégénérée de discriminant impair car congrue modulo 2 à I. L'invariant de Arf de la réduction q_2 modulo 2 de $q/2$ est l'*invariant de Rohlin-Robertello* du nœud K (cf. [Rb]).

Le *polynôme d'Alexander normalisé*[3]) de K est $\Delta_K(t) = \det(t^{1/2}S - t^{-1/2}\,{}^tS)$. Dans le cas d'un nœud, le rang de $H_1(F; \mathbf{Z})$ est pair et on obtient un polynôme[4]) en t et t^{-1} qui vérifie $\Delta_K(1) = 1$ et $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$. On en déduit que le polynôme d'Alexander ne dépend pas de l'orientation ambiante (car si l'on renverse celle-ci, la matrice de Seifert se change en sa transposée).

---

[1]) Deux surfaces de Seifert d'un même entrelacs sont isotopes après que l'on leur ait rajouté des anses triviales et donc deux matrices de Seifert sont S équivalentes: congruentes après un certain nombre de stabilisations $S \mapsto \begin{bmatrix} S & * & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ou $S \mapsto \begin{bmatrix} S & * & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (cf. [G]).

[2]) ${}^t\mathscr{S}$ désigne la transposée de la forme $\mathscr{S}$: ${}^t\mathscr{S}(x, y) = \mathscr{S}(y, x)$.

[3]) D'après la note 1 ci-dessus $\Delta_K(t)$ ne dépend pas du choix de la surface de Seifert S.

[4]) Plus généralement si le rang de $H_1(F; \mathbf{Z})$ est pair (sinon $t^{1/2}\Delta_K(t)$ est un polynôme en t et t^{-1}).

La variation par changement de croisement du polynôme d'Alexander normalisé est donnée par la formule de Conway:

A.1. LEMME (Formule de Conway). *Soient* K_-, K_0 *et* K_+ *trois entrelacs orientés qui coïncident hors d'une boule* B *et coupent cette boule en deux arcs dénoués disposés suivant les schémas de la figure 12*

Alors:

$$\Delta_{K_+}(t) - \Delta_{K_-}(t) = (t^{-1/2} - t^{1/2})\Delta_{K_0}(t) .$$

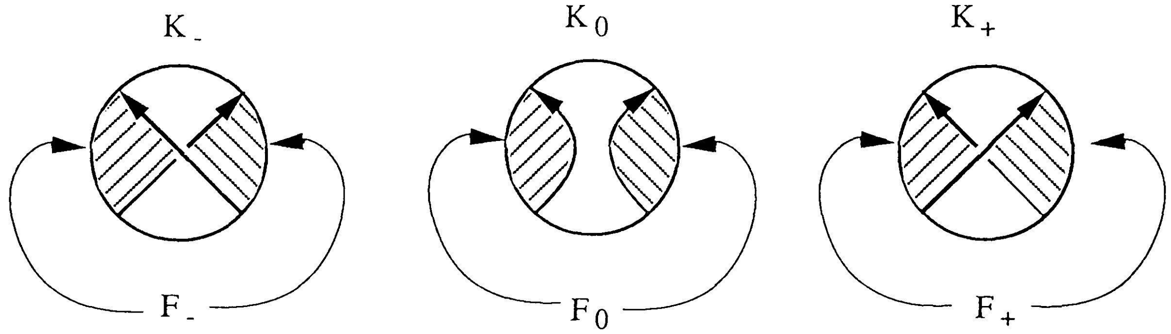

FIGURE 12

Modification d'une surface de Seifert lors d'un changement d'un croisement

Démonstration de A.1. Soit F_0 une surface de Seifert connexe pour K_0 qui coupe la boule B en deux disques disjoints bordés chacun par un arc de ∂B et une composante de $B \cap K$. Définissons F_+ et F_- des surfaces de Seifert pour K_+ et K_- qui sont égales à F_0 hors de B et dans B sont les bandes que l'on voit sur la figure 12.

Les paires de surfaces (F_+, F_0) et (F_-, F_0) sont abstraitement difféomorphes. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ des courbes de F_0 formant une base de $H_1(F_0; \mathbf{Z})$ et soit a_0 une courbe de $F_\pm$ telle que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ donne une base de $H_1(F_\pm; \mathbf{Z})$. Si S_-, S_0, S_+ sont les matrices de Seifert correspondantes dans ces bases on a

$$S_+ = \begin{pmatrix} a & c_1 \ldots c_n \\ b_1 & \\ & V_0 \\ b_n & \end{pmatrix}, S_- = S_+ + \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}, \text{donc}$$

$$t^{1/2}S_+ - t^{-1/2}\,{}^tS_+ = t^{1/2}S_- - t^{-1/2}\,{}^tS_- - \begin{pmatrix} t^{1/2} - t^{-1/2} & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} * & * \quad \cdots \quad * \\ * & \\ & t^{1/2}S_0 - t^{-1/2}\,{}^tS_0 \\ * & \end{pmatrix}.$$

En développant $\det(t^{1/2}S_+ - t^{-1/2}\,{}^tS_+)$ et $\det(t^{1/2}S_- - t^{-1/2}\,{}^tS_-)$ suivant la première colonne on obtient l'identité cherchée. □

A.2. LEMME. *Soit K un nœud dans une sphère d'homologie M alors l'invariant de Rohlin-Robertello de K est la réduction modulo 2 de* $\frac{1}{2}\Delta_K''(1)$.

Démonstration de A.2. La forme quadratique de la surface F de matrice $Q = S + {}^tS$ est paire et de discriminant impair, elle est donc semblable sur les entiers 2-adiques à une somme orthogonale de formes paires de rang 2 (cf. [HNK] p. 4-5):

$$Q = {}^tP \begin{pmatrix} * & & \\ & \begin{pmatrix} 2a_j & 1 \\ 1 & 2b_j \end{pmatrix} & \\ & & * \end{pmatrix} P \quad \text{où la matrice } P \text{ est de déterminant impair .}$$

Il vient donc: $\Delta_K(-1) = \det(iQ) = \det(P)^2 \prod_{j=1}^{g} \det\left(i\begin{pmatrix} 2a_j & 1 \\ 1 & 2b_j \end{pmatrix}\right)$

$$= \det(P)^2 \prod_{j=1}^{g} (1 - 4a_jb_j) \equiv 1 + 4\sum_{j=1}^{g} a_jb_j \text{ modulo } 8$$

On a donc la *formule de Levine*:

$$\Delta_K(-1) \equiv 1 + 4\,\mathrm{Arf}(q_2) \text{ modulo } 8 \text{ .}$$

Puisque $\Delta_K(t)$ est un polynôme en t et t^{-1}, la série de Taylor en 1 de $\Delta_K(t)$ est à coefficients entiers. Elle permet donc de calculer dans les entiers deux-adiques la valeur du polynôme d'Alexander en tout nombre impair et en particulier:

$$\Delta_K(-1) = \Delta_K(1) + \Delta_K'(1) \times (-2) + \frac{1}{2}\Delta_K''(1) \times (-2)^2$$

$$- 8 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!}\Delta_K^{(n)}(1) \times (-2)^{n-3} \text{ ,}$$

Par normalisation on a $\Delta_K(1) = 1$ et $\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$ donc $\Delta_K'(1) = 0$ d'où

$$\Delta_K(-1) \equiv 1 + 4\frac{1}{2}\Delta_K''(1) \text{ modulo } 8 \text{ .}$$

Ce qui par comparaison avec la formule de Levine établit A.2:

$$\mathrm{Arf}(q_2) = \frac{1}{2}\Delta_K''(1) \text{ modulo } 2. \quad \square$$