

# III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B.I

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## III. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME B.1

Soit  $F_0$  la surface de Seifert dénouée du nœud  $K$  et  $F = F_- \cup F_+$  le bord d'un voisinage régulier  $W_1$  de  $F_0$  et  $W_2$  le bretzel complémentaire.

Choisissons une base  $(e_1, e_2)$  de  $\pi_1(F_0)$  induisant une base symplectique de  $H_1(F_0)$  et prenons-la pour base de  $\pi_1(W_1)$ . Choisissons aussi une base  $(f_1, f_2)$  de  $H_1(W_2)$  telle que la matrice des nombres d'enlacement  $lk(e_i, f_j)$  soit la matrice identité, alors la matrice de l'application induite par l'inclusion  $H_1(F_+) \rightarrow H_1(W_2)$  est la matrice de Seifert  $S$  de  $F_0$ . Une base symplectique de  $H_1(F_*)$  est  $(e_2^-, e_1^-, e_1^+, e_2^+)$  où  $e_i^\pm$  est la courbe  $e_i$  poussée dans  $F_\pm$ .

CALCUL DE  $(Q_1, Q_2)_{R_*}$ 

On identifie, grâce aux bases précédentes,  $R_*, Q_1, Q_2, R_0, R_-, R_+$  à des produits de sphères  $S^3$ . D'après le corollaire 3.4 le nombre d'intersection  $(Q_1, Q_2)_{R_*}$  est égal à

$$\det(H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_1) \oplus H_1(W_2))$$

où les flèches en homologie sont induites par les inclusions d'espace.

Les matrices de  $H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_1)$  et  $H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_2)$  sont respectivement  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\left( {}^tS \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} S \right)$  où  $S$  est la matrice de Seifert de la surface  $F_0$  et  ${}^tS$  sa transposée. Notons  $T$  la matrice  ${}^tS \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Alors

$$(Q_1, Q_2)_{R_*} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ T & & S & \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & S - {}^tS & \end{bmatrix} = -\det(S - {}^tS) = -1,$$

car  $S - {}^tS$  est la matrice de la forme d'intersection de  $F_0$  donc de déterminant 1.  $\square$

CALCUL DE  $\langle \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} = 2 \langle \hat{\delta}, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}$ 

Remarquons que  $\hat{\delta} \subset \hat{R}_-$  est inclus dans l'ouvert  $\hat{\mathcal{U}}$  donc d'après la partie II

$$\begin{aligned} 2 \langle \hat{\delta}, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} &= 2(\hat{\delta} \cdot (\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}))_{\hat{R}} = 2\varepsilon(f(\hat{\delta}) \cdot f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}))_{\hat{R}_+} \\ &= 2\varepsilon(\varepsilon\Sigma \cdot f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}))_{\hat{R}_+} = -2 \deg(\pi: f(\hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{U}}) \rightarrow \hat{R}_+). \end{aligned}$$

Or on a un morphisme de  $SO(3)$  fibrés

$$\begin{array}{ccc}
 Q_2 \cap \mathcal{Q} & \xrightarrow{i_+ |_{Q_2 \cap \mathcal{Q}}} & \tilde{R}_+ \\
 \sigma \uparrow \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\
 \hat{Q}_2 \cap \hat{\mathcal{Q}} & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \hat{R}_+
 \end{array}$$

où  $i_+ : Q_2 \rightarrow R_+$  est induit par l'inclusion  $F_+ \rightarrow W_1$  et  $\bar{\pi}$  est défini par ce diagramme.

Donc

$$\deg(\bar{\pi}) = \deg(i_+ |_{Q_2 \cap \mathcal{Q}}) = \deg(i_+) = \deg(H_1(F_*) \rightarrow H_1(W_2)) = \det(S)$$

où la troisième égalité a lieu d'après le corollaire 3.4.

$$\text{Donc } \langle \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} = -2 \det(S).$$

Comme  $g = 2$  il vient bien:

$$\begin{aligned}
 \lambda'(K) &= \frac{1}{2} (-1)^g \frac{\langle \hat{h}(\hat{Q}_1), \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}} - \langle \hat{Q}_1, \hat{Q}_2 \rangle_{\hat{R}}}{(Q_1, Q_2)_{R_*}} = \frac{1}{2} \frac{-2 \det(S)}{-1} \\
 &= \det(S). \quad \square
 \end{aligned}$$