Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 38 (1992)

Heft: 3-4: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTES SUR L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES D'HOMOLOGIE DE DIMENSION TROIS

Kapitel: §0. Introduction

Autor: Guillou, L. / Marin, A.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-59492

APPENDICE C

par Christine LESCOP

UN CALCUL ÉLÉMENTAIRE DE L'INVARIANT DE CASSON DES SPHÈRES D'HOMOLOGIE ENTIÈRE FIBRÉES DE SEIFERT À TROIS FIBRES EXCEPTIONNELLES

§0. INTRODUCTION

Le but de cet appendice est de présenter un calcul direct (à partir de la construction de la partie 3.B) de l'invariant de Casson des fibrés de Seifert à 3 fibres exceptionnelles, sphères d'homologie entière.

L'ensemble des classes de représentations irréductibles du groupe fondamental de ces fibrés a un cardinal fini calculé, géométriquement au paragraphe C.3.A, et différemment par S. Boyer et D. Lines dans l'appendice B de [BL].

Avec les notations de 3.B (en supposant arrêtés les différents choix), l'étude du voisinage de $\hat{Q}_1 \cap \hat{Q}_2$ dans $\hat{R}$, faite au paragraphe C.3.B, montre que, dans ce cas, les espaces $\hat{Q}_1$ et $\hat{Q}_2$ se coupent transversalement dans $\hat{R}$ et toujours avec le même signe; l'invariant de Casson d'une telle sphère d'homologie est alors, au signe près, la moitié du cardinal de l'ensemble des classes de représentations irréductibles de son groupe fondamental.

On retrouve ainsi, pour le cas des fibrés à trois fibres exceptionnelles, le résultat que R. Fintushel et R. Stern ont démontré à l'aide de l'homologie de Floer dans [FS]:

«*L'invariant de Casson d'un fibré de Seifert* Σ, *sphère d'homologie entière, est égal, au signe près, à la moitié de la caractéristique d'Euler de* $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$.»

Pour un fibré de Seifert Σ, sphère d'homologie entière, $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ est une réunion disjointe de variétés différentiables de dimension paire. P. Kirk et E. Klassen étudient en détails $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ dans [KK] où ils donnent en particulier une approche du calcul de la caractéristique d'Euler de $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$. D'autre part, K. Walker, dans [W], a défini, pour toute sphère d'homologie entière (et même rationnelle!), une structure complexe sur l'espace tangent $T\hat{R}$ pour laquelle $T\hat{Q}_1$ et $T\hat{Q}_2$ sont totalement réels, ceci permet de justifier l'intervention de la caractéristique d'Euler de chaque composante connexe de $\hat{R}(\pi_1(\Sigma))$ dans l'expression de l'invariant de Casson de Σ; il pourrait être intéressant de comprendre pourquoi les caractéristiques d'Euler de toutes les composantes apparaisent avec le même signe...

Remarque. Le calcul effectué ci-dessous et la formule de chirurgie de Casson 1.3.3 suffisent pour calculer l'invariant de Casson de toutes les sphères d'homologie entière fibrées de Seifert (voir [FMS] et [NW]). En fait, la généralisation par K. Walker de l'invariant de Casson et de la formule de chirurgie I.3.3 ([W]) permettent un calcul beaucoup plus simple de ce nouvel invariant généralisé pour toutes les sphères d'homologie rationnelle fibrées de Seifert (voir [L]).

Je remercie M. Boileau, qui m'a décrit le scindement de Heegaard du paragraphe 2, L. Guillou, A. Marin, qui m'a suggéré le calcul du paragraphe 3.A, et P. Vogel.

§1. Présentation des espaces et énoncé du théorème

Notations. Dans cet appendice, a_1, a_2 et a_3 désigneront trois entiers positifs deux à deux premiers entre eux.

On note $\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ la sphère de Brieskorn qui admet les deux présentations de chirurgie équivalentes (voir [Rf] chapitre 9 §G):

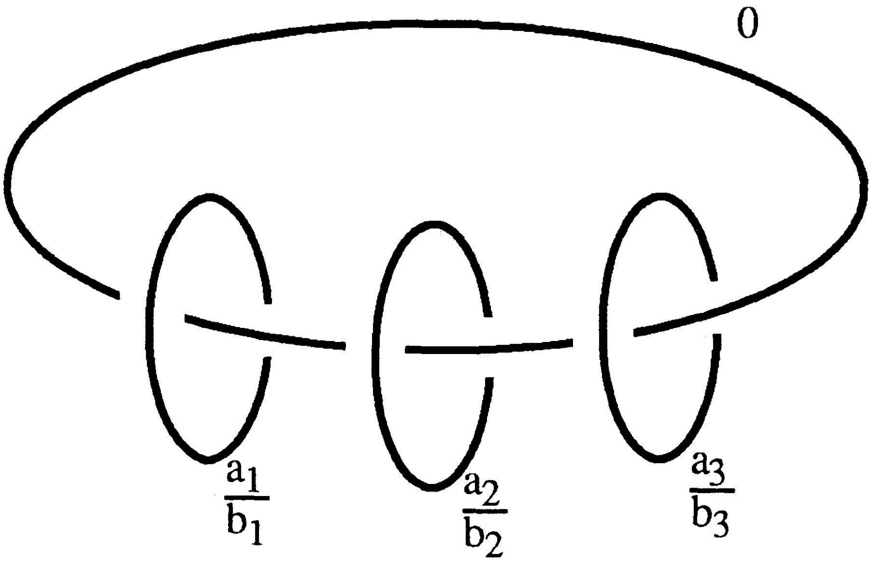

FIGURE 1

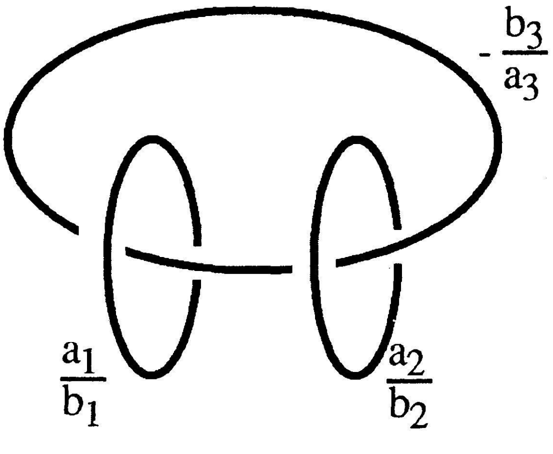

FIGURE 2