

2. Paperfolding sequences and Toeplitz transforms

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Example. Let B be the sequence $(0\omega 1\omega)^\infty$, and let f be defined on $\{0, 1, \omega\}$ by $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(\omega) = \omega$, then one has:

$$B_0 = (0\omega 1\omega 0\omega 1\omega \cdots) (= B),$$

$$B_1 = (1\omega 0\omega 1\omega 0\omega \cdots),$$

$$B_2 = B_0,$$

...

$$A_0 = (0\omega 1\omega 0\omega 1\omega \cdots),$$

$$A_1 = (011\omega 001\omega \cdots),$$

$$A_2 = (0110001\omega \cdots),$$

...

Note that if Γ is finite, and f one-to-one, such a sequence $Tt(B, f)$ can also be obtained by replacing B by a sequence of greater period and f by id .

We now give four examples of Toeplitz transforms in (apparently) unrelated domains.

2. PAPERFOLDING SEQUENCES AND TOEPLITZ TRANSFORMS

In [23] and [22] Prodinger and Urbanek study the Toeplitz transform of $((0\omega 1\omega)^\infty, id)$ and of $((0\omega 1\omega 1\omega 0\omega)^\infty, id)$. They prove that these sequences do not have arbitrarily long squares (a sequence A contains a square of length $2k$ if there exists an index j such that $A(j+n) = A(j+n+k)$ for every n between 0 and $k-1$). Dekking already noticed in [10] that the first sequence is nothing but the regular paperfolding sequence (see [9], [18], [20], [17]), which is obtained by repeatedly folding a piece of paper, and we obtained in [1] the same result as Prodinger and Urbanek for the general paperfolding sequences. Let us give here two simple examples:

PROPOSITION. *Let B be the sequence $B = (0\omega 1\omega)^\infty$ and let f be defined by $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ and $f(\omega) = \omega$. Then*

the sequence $Tt(B, id)$ is the regular paperfolding sequence,

the sequence $Tt(B, f)$ is the alternate paperfolding sequence.

Proof. It follows from instance from [18] (after replacing 1's by 0's and - 1's by 1's) that the regular paperfolding sequence R and the alternate paperfolding sequence A are given by

$$R(2^k(2m+1)-1) = \frac{(1 - (-1)^m)}{2} \quad \forall k, m \geq 0.$$

$$A(2^k(2m+1)-1) = \frac{(1 - (-1)^{k+m})}{2} \quad \forall k, m \geq 0.$$

Let U and V be the sequences defined by

$$U = Tt((0\omega 1\omega)^\infty, id),$$

$$V = Tt((0\omega 1\omega)^\infty, f).$$

A straightforward computation gives

$$U(2n) = \frac{(1 - (-1)^n)}{2} \quad \forall n \geq 0,$$

$$U(2n+1) = U(n) \quad \forall n \geq 0.$$

Hence

$$\begin{aligned} U(2^k(2m+1)-1) &= U(2(2^{k-1}(2m+1)-1)+1) \\ &= U(2^{k-1}(2m+1)-1) = \dots = U(2m) = \frac{(1 - (-1)^m)}{2}. \end{aligned}$$

This proves that $U = R$.

In the same way one has

$$V(2n) = \frac{(1 - (-1)^n)}{2},$$

$$V(2n+1) = 1 - V(n).$$

Hence

$$\begin{aligned} V(2^k(2m+1)-1) &= V(2(2^{k-1}(2m+1)-1)+1) = 1 - V(2^{k-1}(2m+1)-1) \\ &= \dots = \left\{ \begin{array}{ll} V(2m) & \text{if } k \text{ is even,} \\ 1 - V(2m) & \text{if } k \text{ is odd,} \end{array} \right\} = \frac{(1 - (-1)^{k+m})}{2}, \end{aligned}$$

and finally $V = A$.