

0. Preliminaries

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Finally, in Section 4 and 5, we give several examples of the use of the Multiplier Theorem.

0. PRELIMINARIES

In this section, we establish the simple relationship between periodic and aperiodic correlation coefficients, and show that every Barker sequence of length greater than 2 is also a *periodic* Barker sequence.

LEMMA. *Let $A = (a_1, \dots, a_l)$ be a binary sequence. Then*

$$\gamma_j(A) = c_j(A) + c_{l-j}(A)$$

for all $j = 1, \dots, l - 1$.

Proof. We have

$$\begin{aligned} \gamma_j(A) &= \sum_{i=1}^l a_i a_{i+j} = \sum_{i=1}^{l-j} a_i a_{i+j} + \sum_{i=l-j+1}^l a_i a_{i+j} \\ &= c_j(A) + \sum_{i=l-j+1}^l a_{i+j-l} a_i = c_j(A) + c_{l-j}(A), \end{aligned}$$

as claimed. \square

For the next result, we will use, as other papers on binary sequences do, the simple observation that

$$ab \equiv a + b - 1 \pmod{4}$$

for all $a, b \in \{+1, -1\}$.

PROPOSITION 2. *Let $A = (a_1, \dots, a_l)$ be a Barker sequence, with $l \geq 3$. Then A is also a periodic Barker sequence.*

Proof. We have to prove that $\gamma_j = \gamma_j(A)$ is independent of $j = 1, \dots, l - 1$, and equal to 0 or ± 1 . First of all, we have (with $c_j = c_j(A)$)

$$(1) \quad c_j = \begin{cases} 0 & \text{if } l - j \text{ is even} \\ \pm 1 & \text{if } l - j \text{ is odd} \end{cases}$$

for all $j = 1, \dots, l - 1$.

This follows from the obvious congruence $c_j \equiv l - j \pmod{2}$, and the fact that $c_j \in \{-1, 0, +1\}$, for all $j = 1, \dots, l - 1$.

Now, applying the relation $ab \equiv a + b - 1 \pmod{4}$ for any $a, b = \pm 1$, we have

$$(2) \quad c_j = \sum_{i=1}^{l-j} a_i a_{i+j} \equiv \sum_{i=1}^{l-j} (a_i + a_{i+j}) - (l-j) \pmod{4}$$

for $j = 1, \dots, l - 1$.

Comparing the above congruences for two successive values of j , we obtain

$$(3) \quad c_j - c_{j+1} \equiv a_{l-j} + a_{j+1} - 1 \pmod{4},$$

for $j = 1, \dots, l - 2$.

Changing j to $l - j - 1$ leaves the right-hand-side unchanged. Therefore, we have

$$(4) \quad c_j - c_{j+1} \equiv c_{l-j-1} - c_{l-j} \pmod{4},$$

for $j = 1, \dots, l - 2$. Since $|c_j - c_{j+1}| \leq 1$ for all j by (1), we have in fact an equality:

$$c_j - c_{j+1} = c_{l-j-1} - c_{l-j}$$

for $j = 1, \dots, l - 2$. Using Lemma 1, it follows that

$$\gamma_j = \gamma_{j+1}$$

for all $j = 1, \dots, l - 2$, and thus γ_j is independent of j , as claimed.

Now $|\gamma_j| = |c_j + c_{l-j}| \leq 2$, and equality can occur only if $c_j = c_{l-j} = \pm 1$, which by (1) implies in particular that j must be odd. But this is impossible, because γ_j is independent of j . Therefore $|\gamma_j| \leq 1$, as claimed. \square

1. DIFFERENCE SETS

In this section, we show that the notion of a binary sequence with constant periodic correlations is equivalent to that of a difference set on a cyclic group. We then recall basic results concerning these difference sets.

Definition. A difference set D on a group G is a subset $D \subset G$ such that the cardinality of the intersection

$$D \cap g \cdot D$$

is independent of g for $g \in G \setminus \{e\}$. Here, $gD = \{gx \mid x \in D\}$ is the translate of D by the element $g \in G$, and e is the neutral element of G .