

## §4. Category of nilmanifolds

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$\begin{array}{ccccc}
S^1 & \rightarrow & M & = & K(\pi, 1) \\
& & \downarrow & & \\
S^1 & \rightarrow & M_{n-1} & \xrightarrow{\tau_n} & CP(\infty) \\
& & \downarrow & & \\
& & \vdots & & \\
& & \downarrow & & \\
S^1 & \rightarrow & M_1 & \xrightarrow{\tau_2} & CP(\infty) \\
& & \downarrow & & \\
& & * & \xrightarrow{\tau_1} & CP(\infty) .
\end{array}$$

We can assume (by finite dimensionality) that each  $\tau_i$  has image in a finite  $CP(n)$ , so thus may be approximated by a smooth map. Hence, each  $M_j$  is a compact manifold with

$$\dim(M_j) = \dim(M_{j-1}) + 1 .$$

Thus,  $\dim(M) = \text{rank}(\pi) = n$ .

#### §4. CATEGORY OF NILMANIFOLDS

The decomposition of  $M = K(\pi, 1)$  into a tower of principal  $S^1$ -bundles is, in fact, the Postnikov decomposition of  $M$  with  $k$ -invariants the  $\tau_i$ . By the fundamental theorem of rational homotopy theory, the minimal model has the form,

$$\Lambda(M) = (\Lambda(x_1, \dots, x_n), d) , \quad \deg(x_i) = 1$$

with  $dx_i = \tau_i$ , where  $\tau_i$  is a cocycle representing the class  $\tau_i \in H^2(M_{i-1}; \mathbf{Z})$ . Note that  $\Lambda(M)$  is an exterior algebra because all generators are in degree 1. Therefore, since  $\dim M = n$ , the only possibility for a cocycle representing the fundamental class is  $x_1 \cdots x_n$ . Hence,  $e_0(M) = n$  and this immediately implies,

*Proof of Theorem 1.*  $n = e_0(M) \leq \text{cat}_0(M) \leq \text{cat}(M) \leq \dim M = n$ .  $\square$

*Example.* Consider the 3-dimensional Heisenberg group  $U_3(\mathbf{R})$  and mod out by  $U_3(\mathbf{Z})$ . The resulting  $M$  is a 3-manifold obtained as a principal bundle,

$$S^1 \rightarrow M \rightarrow T^2$$

with classifying element (over the rationals)  $xy \in H^2(T^2; \mathbf{Q})$ , where  $x$  and  $y$  are one-dimensional generators. The minimal model of  $M$  is then given by

$$\Lambda(M) = \Lambda(x, y, z) \quad \deg(x) = \deg(y) = \deg(z) = 1$$

with  $dx = 0 = dy$  and  $dz = xy$ . Additive generators for cohomology are then,

$$H^1: x, y$$

$$H^2: xz, yz \text{ (Massey products!)}$$

$$H^3: zyx .$$

Note that  $\text{cup}(M) = 2$ , but  $\text{cat}(M) = 3$ .

In some sense then, the proof of Theorem 1 is simply an observation that the techniques of rational homotopy theory work particularly well for nilmanifolds.

PROBLEM. If  $\pi$  is not nilpotent, then a  $K(\pi, 1)$  is not a nilpotent space, so the minimal model does not describe a "rational type". Is it possible, however, that enough information about a  $K(\pi, 1)$  is present in the model to determine its category (in the compact case say)?

## §5. HIGHER DEGREE ANALOGUES

An analogue of the minimal model of a nilmanifold is one of the form,

$$(\Lambda(x_1, \cdots x_n), d) , \quad \text{degree}(x_i) = \text{odd} .$$

Such an algebra is known to satisfy rational Poincaré duality (see [5]) and to have formal top dimension  $\sum_i \text{deg}(x_i)$ . But, plainly, the same argument as before applies to show that the "only" element in this exterior algebra which can reach the stated dimension is  $x_1 \cdots x_n$ . Hence (since this is the longest product in  $\Lambda$ ), the fundamental class is maximally represented by a product of length  $n$  and

LEMMA.  $e_0(\Lambda) = n$ .

Now, we may consider  $\Lambda$  as built up by adjoining odd generators one at a time (with decomposable differential). Let  $\Lambda Z$  be a minimal cdga and  $y$  of odd degree. Then

PROPOSITION. (See Theorem 4.7 and Lemma 6.6 of [3].)

$$\text{cat}_0(\Lambda Z \otimes \Lambda y) \leq \text{cat}_0(\Lambda Z) + 1 .$$