

§5. HIGHER DEGREE ANALOGUES

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **38 (1992)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

with classifying element (over the rationals) $xy \in H^2(T^2; \mathbf{Q})$, where x and y are one-dimensional generators. The minimal model of M is then given by

$$\Lambda(M) = \Lambda(x, y, z) \quad \deg(x) = \deg(y) = \deg(z) = 1$$

with $dx = 0 = dy$ and $dz = xy$. Additive generators for cohomology are then,

$$H^1: x, y$$

$$H^2: xz, yz \text{ (Massey products!)}$$

$$H^3: zyx .$$

Note that $\text{cup}(M) = 2$, but $\text{cat}(M) = 3$.

In some sense then, the proof of Theorem 1 is simply an observation that the techniques of rational homotopy theory work particularly well for nilmanifolds.

PROBLEM. If π is not nilpotent, then a $K(\pi, 1)$ is not a nilpotent space, so the minimal model does not describe a "rational type". Is it possible, however, that enough information about a $K(\pi, 1)$ is present in the model to determine its category (in the compact case say)?

§5. HIGHER DEGREE ANALOGUES

An analogue of the minimal model of a nilmanifold is one of the form,

$$(\Lambda(x_1, \dots, x_n), d) , \quad \text{degree}(x_i) = \text{odd} .$$

Such an algebra is known to satisfy rational Poincaré duality (see [5]) and to have formal top dimension $\sum_i \text{deg}(x_i)$. But, plainly, the same argument as before applies to show that the "only" element in this exterior algebra which can reach the stated dimension is $x_1 \cdots x_n$. Hence (since this is the longest product in Λ), the fundamental class is maximally represented by a product of length n and

LEMMA. $e_0(\Lambda) = n$.

Now, we may consider Λ as built up by adjoining odd generators one at a time (with decomposable differential). Let ΛZ be a minimal cdga and y of odd degree. Then

PROPOSITION. (See Theorem 4.7 and Lemma 6.6 of [3].)

$$\text{cat}_0(\Lambda Z \otimes \Lambda y) \leq \text{cat}_0(\Lambda Z) + 1 .$$

Proof. Suppose $\text{cat}_0(\Lambda Z) = m$. Then ΛZ is a retract of $\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z$ and we see that $\Lambda Z \otimes \Lambda y$ is a retract of $\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z \otimes \Lambda y$. Now, the maximal product length of $\Lambda Z/\Lambda^{>m}Z \otimes \Lambda y$ is $m + 1$ and this is sufficient to ensure $\text{cat}_0(\Lambda Z \otimes \Lambda y) \leq m + 1$. \square

Now, by induction, we see that $\text{cat}_0(\Lambda) \leq n$ (since for x_1 of odd degree $\text{cat}_0(\Lambda x_1) = 1$). Putting this together with the Lemma gives

THEOREM 2. *If $\Lambda = (\Lambda(x_1, \dots, x_n), d)$ with $\deg(x_i) = \text{odd}$ for each i , then $\text{cat}_0(\Lambda) = n$.*

This result may be applied, for example, to a manifold obtained as an iterated principal bundle. That is, for compact Lie groups $G_i, i = 1$ to N .

$M_1 = G_1$; M_i is obtained from M_{i-1} as a principal G_i -bundle over M_{i-1} .

$M = M_N$

Each G_i is, rationally, a product of $\text{rank}(G_i)$ odd spheres, so the minimal model of M has the form,

$$\Lambda(M) = (\Lambda(x_1, \dots, x_s), d)$$

with $\deg(x_i) = \text{odd}$ and $s = \sum_{i=1}^N \text{rank}(G_i)$.

COROLLARY. $\text{cat}_0(M) = \sum_{i=1}^N \text{rank}(G_i)$.

COROLLARY. *If M is an iterated principal bundle with fibres G_i , then the number of critical points of any smooth function on M is bounded below by $\sum_i \text{rank}(G_i) + 1$.*

Note that we have not determined $\text{cat}(M)$, so the true effectiveness of Lusternik-Schnirelmann theory may not have been exploited.

§6. GANEA'S CONJECTURE

The Ganea Conjecture states that, for a finite CW complex X , $\text{cat}(X \times S^k) = \text{cat}(X) + 1$ for any sphere S^k . Although unproven in general, various cases of the conjecture have been shown to be true. We add nilmanifolds to that list:

THEOREM. *Ganea's Conjecture is true for nilmanifolds.*